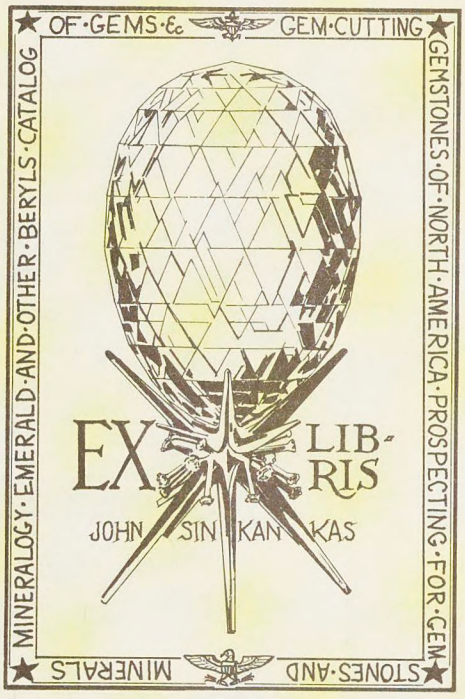
H. E. Boeke

Die Anwendung der stereographischen Projektion bei kristallographischen Untersuchungen

Gebrüder Borntraeger Berlin


OF·GEMS·&c
GEM·CUTTING
GEMSTONES·OF·NORTH·AMERICA·PROSPECTING·FOR·GEM
STONES·AND
MINERALS
MINERALOGY·EMERALD·AND·OTHER·BERYLS·CATALOG
EX
LIB-
RIS
JOHN
SIN
KAN
KAS

H. E. BOEKE

DIE ANWENDUNG

DER

STEREOGRAPHISCHEN PROJEKTION

JSL
00071254

DIE ANWENDUNG

DER

STEREOGRAPHISCHEN PROJEKTION

BEI KRISTALLOGRAPHISCHEN UNTERSUCHUNGEN

VON

PROF. DR. H. E. BOEKE

MIT 57 TEXTABBILDUNGEN UND EINER LITHOGRAPHISCHEN TAFEL

BERLIN
VERLAG VON GEBRÜDER BORNTRAEGER
W 35 SCHÖNEBERGER UFER 12a
1911

Alle Rechte, insbesondere das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Buchdruckerei des Waisenhauses in Halle a. d. S.

Vorwort

Über die Benutzung der stereographischen Projektion für die übersichtliche Darlegung und Ermittelung kristallographischer Daten ist eine ausgedehnte Literatur vorhanden, die in letzter Zeit besonders durch die Arbeiten von E. von Fedorow, S. L. Penfield, G. Wulff u. a. bereichert wurde. Erst seit der Einführung des stereographischen Netzes in die kristallographische Praxis durch G. Wulff im Jahre 1902 ist die Notwendigkeit ziemlich verwickelter Konstruktionen oder die Benutzung verschiedener Transporteure fortgefallen und hat man die großen Vorzüge der stereographischen Methode bequem ausnutzen können. Besonders E. A. Wülfing hat im Jahre 1904 weitere Kreise mit der Anwendung des Wulffschen Netzes vertraut gemacht durch Zugabe eines solchen Netzes zu seinem „Allgemeinen Teil der mikroskopischen Physiographie der petrographisch wichtigen Mineralien".

Wenn ich trotzdem eine Schrift über „Die Anwendung der stereographischen Projektion bei kristallographischen Untersuchungen" veröffentliche, so gab dazu die Erfahrung Veranlassung, daß es den Studenten der Mineralogie schwer fällt, die allgemein gehaltenen Angaben von Wülfing auf besondere Fälle anzuwenden und daraus die mannigfachen Schlußfolgerungen zu ziehen, zu welchen die Methode fähig ist. Andererseits wird die Benutzung der älteren Literatur erschwert durch die seit Wulffs Arbeit unnötig gewordenen Komplikationen. Das vorliegende Heft verfolgt daher hauptsächlich pädagogische Zwecke, die Behandlung ist ausführlich und voraussetzungslos gehalten, bei Beweisführungen sind möglichst Anschauungs- an Stelle von analytischen Methoden gewählt. Letzteres mit Rücksicht auf den Grundsatz, daß für die allermeisten Anfänger ein analytischer Beweis zwar unwiderleglich aber nicht überzeugend

ist. Fernerhin habe ich es als erwünscht betrachtet, für die zwei Haupteigenschaften der stereographischen Projektion, die Abbildung von Kreisen durch Kreise und die Winkeltreue, einfache Beweise anzuführen, weil diese höchst wichtigen Beziehungen bei bloßer Erwähnung immer etwas Mysteriöses behalten würden.

Besonders auch die von F. Stöber zuerst angegebene Methode des Kristallzeichnens mit Hilfe der stereographischen Projektion gestaltet sich durch die Anwendung des Wulffschen Netzes wesentlich bequemer als ohne dieses Hilfsmittel. Die vorliegende Schrift möge dazu Veranlassung geben, daß diese sehr einfache Zeichenart sich auch in Deutschland mehr einbürgere, wie sie bei amerikanischen Mineralogen infolge von Penfields Arbeiten schon üblich geworden ist.

Leipzig, im Februar 1911

H. E. Boeke

Inhalt

Seite

Einleitung. § 1 1

Die stereographische Projektion und ihre beiden Haupteigenschaften.

§ 2. Die Ausführung der Projektion 2

§ 3. Beweis, daß ein Kreis auf der Kugel sich als Kreis projiziert . . 3

§ 4. Beweis der Winkeltreue der stereographischen Projektion . . . 4

Beziehung zwischen Flächenwinkeln und Kantenwinkeln in der stereographischen Projektion. § 5 5

Die Achsenabschnitte der Kristallflächen. § 6 7

Bestimmung von Punkten der Kugel durch Länge (φ) und Polardistanz (ϱ). § 7 8

Das Wulffsche Netz und seine Verwendung. § 8 9

Hauptaufgaben der stereographischen Projektion.

§ 9. Die Winkelentfernung zweier in stereographischer Projektion gegebenen Flächenpole 13

§ 10. Andere Konstruktion der Winkelentfernung zweier Punkte . . . 14

§ 11. Der Winkel zweier Zonenkreise 15

§ 12. Der Zonenkreis zu einem gegebenen Pol 15

§ 13. Der Pol eines Zonenkreises, bezw. Durchstichpunkt einer Zonenachse 16

§ 14. Ort der Punkte, die um einen gewissen Winkelwert von einem Pol entfernt sind 16

Lösung der obigen Aufgaben ohne Wulffsches Netz.

§ 15. Der Pol und Gegenpol zu einer gegebenen Großkreisprojektion . . 18

§ 16. Die Großkreisprojektion zu einem gegebenen Pole 18

§ 17. Ein Zonenkreis durch zwei gegebene Punkte 18

§ 18. Der Winkel zweier Zonenkreise 19

§ 19. Ort der Punkte, die um einen gewissen Winkelwert von einem Pole P entfernt sind 20

Vertauschung der Projektionsebene einer stereographischen Projektion. § 20 20

Flächensymbole und Zonenbeziehungen.

§ 21. Konstruktion der Achsenabschnitte der in stereographischer Projektion gegebenen Einheitsfläche 21

Seite

§ 22. Bestimmung des Symbols einer beliebigen in stereographischer Projektion gegebenen Kristallfläche 23
§ 23. Ermittelung der Polprojektion einer Fläche, deren Achsenabschnitte in ihrem Verhältnis bekannt sind 25
§ 24. Zonenbeziehungen 26

Graphische Kristallberechnung in den verschiedenen Systemen.

§ 25 Triklines System 30
§ 26. Monoklines System 32
§ 27. Rhombisches System 34
§ 28. Tetragonales System 35
§ 29. Hexagonales System 36
§ 30. Trigonales System 37
§ 31. Reguläres System 41

Die genaue Kristallberechnung mit Hilfe der stereographischen Projektion. § 32 41
§ 33. Berechnung von Albit als Beispiel 44

Anwendung der stereographischen Projektion bei homogenen Deformationen. § 34 47

Kristallzeichnen mit Hilfe der stereographischen Projektion. § 35 47

Stereographische Projektion und Zeichnung von Kristallzwillingen. § 36 50

Bemerkungen über andere Projektionsmethoden. § 37 52

Anwendung der stereographischen Projektion auf optische Erscheinungen bei Kristallen.

§ 38. Allgemeines 53
§ 39. Auslöschungsschiefe bei optisch einachsigen Kristallen 54
§ 40. Auslöschungsschiefe bei optisch zweiachsigen Kristallen 55
§ 41. Beispiele 56

Einleitung.

§ 1. Die stereographische Projektion hat sich, besonders nach der Einführung des Wulffschen Netzes, als ein ausgiebig verwendbares Hilfsmittel bei der Darstellung und Berechnung von kristallographischen Daten erwiesen. Sie ermöglicht eine schnelle und bequeme zeichnerische Ermittelung von Zahlen, die sonst nur durch ziemlich umständliche Rechnung abgeleitet werden können. Zwar sind verschiedene andere Projektionsmethoden ausgearbeitet, die jedesmal ihre besonderen Vorzüge besitzen (vgl. § 37), sie stehen aber in Unmittelbarkeit und Vielseitigkeit der Verwendung bei der stereographischen Projektion entschieden zurück.

Die graphische Bestimmung kristallographischer Daten ist theoretisch vollkommen quantitativ, die Ausführung der Zeichnung bringt jedoch Fehler mit sich, die der Rechnung mit Zahlen nicht anhaften. Trotzdem ist mit dem üblichen Wulffschen Netz von 20 cm Durchmesser und mit einer Entfernung der Teilkreise um je 2° eine Genauigkeit von $^1/_2{}^\circ$ (nach den Angaben von Wulff) leicht erreichbar. Diese Annäherung genügt für die meisten optischen Bestimmungen, z. B. von Auslöschungsschiefen, während sie bei geometrisch-kristallographischen Rechnungen eine wertvolle Orientierung und Kontrolle der genauen Berechnung bildet. Für die Ableitung des Zonenverbandes und der Indizes einer beliebigen gemessenen Fläche reicht die graphische Methode im allgemeinen vollkommen aus, wie sich im nachfolgenden zeigen wird. Ebenso genügt die Genauigkeit der stereographischen Projektion den Anforderungen einer Kristallzeichnung.

Auch dem Geographen dürfte die vorliegende Schrift Verwendbares bieten, obwohl hier nur auf kristallographische Aufgaben Bedacht genommen ist.

Die stereographische Projektion und ihre beiden Haupteigenschaften.

§ 2. Die Ausführung der Projektion. Man denkt sich um den Kristall eine Kugel und fällt aus dem Mittelpunkt der Kugel Lote auf die Kristallflächen (Fig. 1). Die Durchstichpunkte der Lote auf der Kugel bilden die Flächenpole. Oder man denkt sich eine Parallelverschiebung der Kristallflächen bis zur Tangentialstellung; die Berührungspunkte von Kugel und Flächen sind ebenfalls die Flächenpole. Diese Flächenpole werden auf die Äquatorebene der Kugel projiziert, indem man sie mit dem Südpol S der Kugel durch gerade Linien verbindet. Die Durchstichpunkte dieser geraden Linien mit der Äquatorebene stellen die Projektion der Flächenpole dar. So ist in Fig. 1 p die stereographische Projektion des Poles P der Fläche ABC.

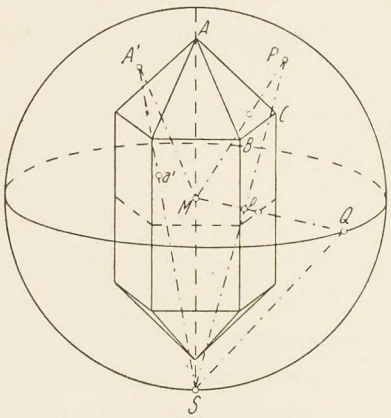


Fig. 1.

Der Äquator der Kugel fällt mit seiner Projektion zusammen und wird als Grundkreis bezeichnet (vgl. Q in Fig. 1).

Eine Kristallkante (also eine Zonenachse) wird projiziert, indem man eine parallele Linie durch den Kugelmittelpunkt zieht und den Durchstichpunkt dieser Linie auf der Kugel mit S verbindet. So bildet a' (Fig. 1) die stereographische Projektion der Kante AB.

Pole und sonstige Punkte auf der unteren Hemisphäre projizieren sich außerhalb des Grundkreises. Die manchmal angewandte Projektion solcher Punkte vom Nordpole aus ist für die graphische Benutzung der stereographischen Projektion nicht empfehlenswert. In den allermeisten Fällen kommt man mit den Punkten auf der oberen Hemisphäre aus, wenn nötig durch Vertauschen von Richtung und Gegenrichtung. Gelegentlich stellt man auch die Projektion der oberen und unteren Halbkugel nebeneinander, wie es bei Erdkarten oft angewandt wird.

Die Lote auf den Flächen einer Zone liegen sämtlich in einer durch M (Fig. 1) gehenden Ebene, die auf der Zonenachse senkrecht steht. Diese Ebene schneidet die Kugel in einem Großkreis, dem Zonenkreis. Jeder Zonenkreis schneidet die Äquatorebene in einer durch M gehenden Geraden. Dieser Durchmesser des Grundkreises bleibt bei der Projektion unverändert. Es folgt daraus der Satz: Die Projektion eines Großkreises geht immer durch zwei Diametralpunkte des Grundkreises.

Großkreise durch den Augenpunkt S, also senkrecht zum Äquator, und ebenfalls Kleinkreise durch S projizieren sich als Gerade.

Die stereographische Projektion besitzt zwei Haupteigenschaften, die ihren großen Wert als Hilfsmittel bei kristallographischen und geographischen Berechnungen bedingen:

1. Kreise auf der Kugel, sowohl Groß- als Kleinkreise, projizieren sich auf die Äquatorebene als Kreise.

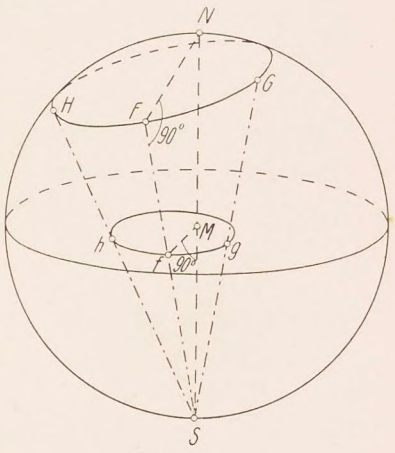


Fig. 2.

2. Die Projektionen zweier beliebigen Richtungen auf der Kugel schließen denselben Winkel ein wie diese Richtungen auf der Kugel selbst, die Projektion ist winkeltreu.

§ 3. Beweis, daß ein Kreis auf der Kugel sich als Kreis projiziert.[1]

In Fig. 2 stellt fgh die stereographische Projektion des Kugelkreises FGH dar. F projiziert sich in f, G in g, usw.

$$\triangle SMf \sim \triangle SFN.$$

Daher: $Sf : SM = SN : SF$,

also: $Sf \cdot SF = SM \cdot SN$

und ebenso: $Sg \cdot SG = SM \cdot SN$

$Sh \cdot SH = SN \cdot SN$

$\vdots$

$\Big\}$ = konstant.

1) Mit geringer Änderung nach V. Goldschmidt, Zeitschr. f. Krist. 1899, **30,** 262. (Dieser entnahm den Beweis der Kartenkunde von Gelcich und Sauter.)

Schlagen wir durch den Kreis FGH und den Punkt f eine Kugel und nehmen wir einstweilen an, daß diese Kugel SG in g', SH in h' schneidet. Für eine Kugel gilt die durch Fig. 3 erläuterte Beziehung, daß $Sf \cdot SF = Sd \cdot SD =$ konstant für alle Strahlen aus S.[1]

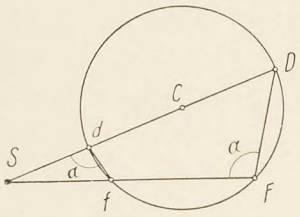


Fig. 3.

Daher ebenfalls $Sg' \cdot SG = Sf \cdot SF$ und weil $Sg \cdot SG = Sf \cdot SF$ fällt g' mit g zusammen.

Ebenso fällt h' mit h zusammen usw.

Es liegt daher fgh mit FGH auf einer Kugeloberfläche und fgh ist ein Kreis als Durchschnitt einer Kugel mit der Projektionsebene.

Derselbe Beweis ist gültig für Großkreise der Kugel.

In Fig. 4 ist die obere Hälfte pqr eines Großkreises projiziert, die Projektion $pq'r$ bildet einen Kreisbogen auf der Sehne pr. Die Ergänzung von $pq'r$ zum vollständigen Kreise fällt außerhalb des Grundkreises.

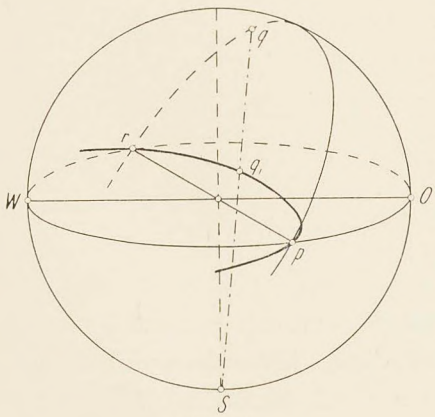


Fig. 4.

§ 4. Beweis der Winkeltreue der stereographischen Projektion.

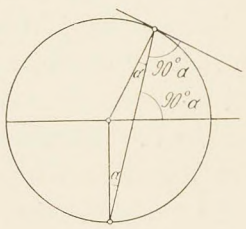


Fig. 5.

Hilfssatz: Ein beliebiger Strahl aus dem Südpol S trifft die Äquatorebene und die Kugel unter gleichen Winkeln. Der Beweis geht aus Fig. 5 unmittelbar hervor.

Der Winkel zweier Richtungen auf der Kugel wird in der Tangentialebene des Schnittpunktes P der beiden Richtungen gemessen.

---

1) S liegt immer außerhalb des Kreises dD, ausgenommen im Grenzfalle der durch den Augenpunkt S gehenden Kugelkreise; der Kreis dD (Fig. 3) wird dann zur Geraden, die S enthält. S kann nicht innerhalb des Kreises dD liegen, weil es in diesem Falle unmöglich wäre, den Kreis durch einseitig aus S gezogene Gerade zweimal zu schneiden, wie es für die stereographische Projektion notwendig ist.

Wir nehmen die eine Richtung Pb (Fig. 6) vorläufig in der Meridianebene von P an. Die Projektion von Pb ist $P'M$. Die zweite Richtung Pa ist beliebig und projiziert sich in $P'a'$. Die Verlängerungen von aP und $a'P'$ schneiden sich in B in der Äquatorebene, weil ein Punkt in dieser Ebene mit seiner Projektion zusammenfällt.

Die Linie AB stellt den Durchschnitt der Äquatorebene und der Tangentialebene von P dar. Sie steht senkrecht auf der Meridianebene durch P, weil sie erstens senkrecht auf der Kugelachse SN, zweitens senkrecht auf dem Radius MP steht.

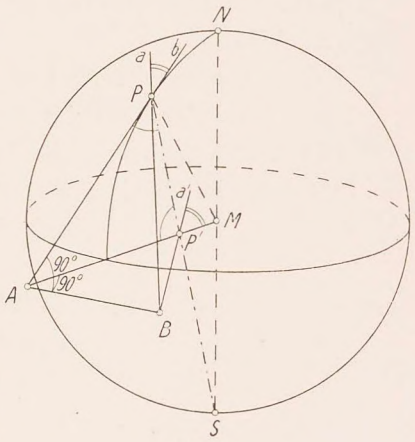


Fig. 6.

Entsprechend dem Hilfssatze ist $\angle APP' = \angle AP'P$ also $AP = AP'$. Daher $\triangle APB \cong \triangle AP'B$ und $\angle aPb = \angle a'P'M$.

Nehmen wir jetzt eine zweite beliebige Richtung, etwa Pc, in der Tangentialebene von P an, so ist der Winkel von Pc mit Pb in Fig. 6 wiederum gleich dem Winkel der Projektion $P'c'$ mit $P'M$. Folglich ist auch die Differenz $\angle cPb - \angle aPb = \angle cPa$ gleich der Differenz der Projektionen $\angle c'P'M - \angle a'P'M = \angle c'P'a'$. Die Winkeltreue ist damit für beliebige Richtungen auf der Kugel bewiesen.

Beziehung zwischen Flächenwinkeln und Kantenwinkeln in der stereographischen Projektion.

§ 5. Die Flächen A, B und C schneiden sich in den Kanten a, b und c, welche die Winkel α, β und γ umschließen (Fig. 7). Aus einem beliebigen Punkte O' sind Lote auf die Flächen gefällt, sie schließen die Winkel p, q und r ein. Wir wollen die Beziehung der Normalenwinkel p, q, r zu den Kantenwinkeln α, β, γ feststellen.

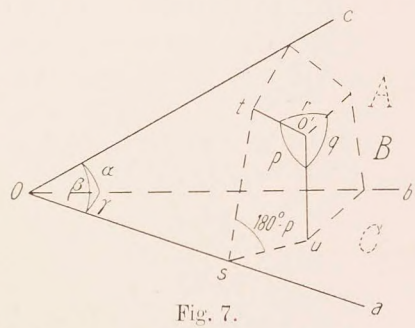


Fig. 7.

Das von den Normalen gebildete sphärische Dreieck ist das

Poldreieck des von den Kanten gebildeten und es gilt hier die bekannte Beziehung:

Winkel des ursprünglichen Dreiecks = Supplemente zu den Seiten des Poldreiecks.

(NB.: Die Ebene $O'tsu$ steht senkrecht zu Os).

oder umgekehrt:

Seiten des ursprünglichen Dreiecks = Supplemente zu den Winkeln des Poldreiecks.

Die letzte Beziehung ist in Fig. 8 zum Ausdruck gebracht. Die Pole der drei Flächen sind durch A, B und C dargestellt. Das sphärische Dreieck ABC wird in der stereographischen Projektion durch drei Kreisbögen abgebildet. Die von diesen Kreisbögen eingeschlossenen Winkel sind nach § 4 gleich den Winkeln des Dreiecks auf der Kugel, sie geben also unmittelbar die Supplemente der Kantenwinkel der drei Flächen wieder. In § 11 werden wir sehen, wie man mit Hilfe des Wulffschen Netzes die Kantenwinkel ablesen kann.

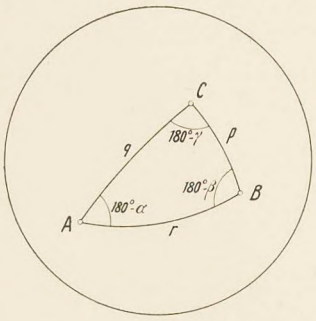


Fig. 8.

Wir finden also den allgemeinen Satz: Die Winkel der stereographischen Projektion eines von drei Flächenpolen gebildeten sphärischen Dreiecks stellen die Supplemente der Kantenwinkel dieser drei Flächen dar, und zwar findet man beim Pole A den Kantenwinkel auf der Fläche A usw., wie es aus den übereinstimmenden Buchstaben in Fig. 7 und 8 erhellt.[1]

Man präge sich die Regel ein: In der stereographischen Projektion entsprechen Seiten von sphärischen Dreiecken Flächenwinkeln, Winkel dagegen Kantenwinkeln.

---

1) Im Interesse der Deutlichkeit der Figuren ist die Lage der Flächen A, B und C in Fig. 7 eine andere als die in Fig. 8.

Die Achsenabschnitte der Kristallflächen.

§ 6. Wie die Ermittelung der Flächen- und Kantenwinkel ist auch die Bestimmung der Abschnitte einer Kristallfläche auf drei sich in einem Punkte schneidenden Kantenrichtungen (Achsen) kristallographisch besonders wichtig. Wir werden hier die allgemeine Lösung des Problems besprechen und in späteren Abschnitten sowohl die graphische Ausführung mit Hilfe des stereographischen Netzes, wie die rechnerische angeben.

In Fig. 9 ist eine Fläche D gezeichnet, welche die Kanten der Flächen A, B und C in a, b und c schneidet. OP ist die Normale zu dieser Fläche D. Die Achsenabschnitte Oa, Ob und Oc kann man in zwei verschiedenen Weisen finden.

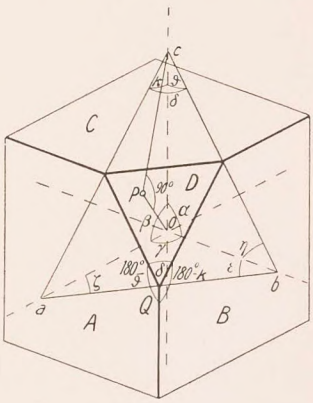


Fig. 9.

1. In $\triangle OPc$ ist $\angle OPc = 90°$ also $Oc = OP \sec POc$.

Ebenso:

$$Oa = OP \sec POa.$$
$$Ob = OP \sec POb.$$

Das Verhältnis $Oa : Ob : Oc$ ist damit auf das Verhältnis einer trigonometrischen Funktion von Winkeln zwischen Kantendurchstichpunkten und einem Flächenpol zurückgeführt. Dieses Verhältnis kann mit Hilfe der stereographischen Projektion leicht ermittelt werden (§ 21).

2. Im Punkte Q (Fig. 9) treten drei Flächen D, A und B zusammen. Verschieben wir A und B parallel sich selbst in das Zentrum O, so bildet sich bei c ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten δ, ϑ, $\varkappa$ sind. Zwei derselben und zwar ϑ und $\varkappa$ sind die Supplemente der Kantenwinkel bei Q, während δ den dritten Kantenwinkel bei Q unverändert wiedergibt, wie es aus Fig. 9 ersichtlich ist.

Die Kantenwinkel bei Q können wir nach § 5 aus dem Poldreieck ABP als Supplemente ablesen (Fig. 10). Ebenso finden wir auch die Winkel ε, ζ und η der Fig. 9 und 10. Die Lage der

verschiedenen Winkel in der Projektion Fig. 10 läßt sich leicht aus Fig. 9 ableiten, wenn man bedenkt, daß alle Winkel in der Fläche A beim Pole A gemessen werden, und daß weiter die drei Winkel bei c (δ, ϑ und $\varkappa$) im Dreieck ABP vorkommen müssen.

Es sind also in $\triangle Obc$ (Fig. 9) die Winkel bekannt und für das gesuchte Verhältnis $Oc : Ob$ haben wir die Sinusbeziehung

$$\frac{Oc}{Ob} = \frac{\sin \eta}{\sin \vartheta}.$$

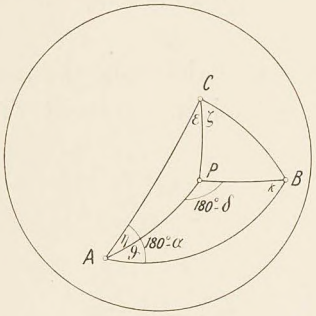


Fig. 10.

In derselben Weise finden wir

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \zeta}.$$

Sobald wir die Winkel ε, ζ usw. graphisch ermitteln können, wozu uns wiederum das Wulffsche Netz instand setzen wird, werden wir auch diese Beziehungen ebenso wie die unter 1. verwenden können zur Bestimmung des Achsenverhältnisses und damit des Symbols der Kristallflächen. Welche der beiden Methoden in speziellen Fällen den Vorzug verdient, wird sich im nachfolgenden herausstellen. Es läßt sich nicht verkennen, daß die zweite Art mehr Überlegung erfordert als die erste, dafür finden wir aber auch das Achsenverhältnis nach der zweiten Methode in Dreiecken mit den Achsenwinkeln (α und γ), was einen großen Vorteil bedeutet (§ 23).

Bestimmung von Punkten der Kugel durch Länge (φ) und Polardistanz (ϱ).

§ 7. Jeder Punkt auf der Kugel, z. B. P in Fig. 6 (S. 5) ist bestimmt durch seine Länge φ von einem Nullmeridian aus und durch die Breite, oder besser die Polardistanz ϱ, welche die Breite zu 90^0 ergänzt. Projizieren wir die Meridiane und die Breitekreise stereographisch auf die Äquatorebene als Zeichenebene (Fig. 11),

so läßt sich die Lage eines jeden Punktes gleich angeben. Als Nullmeridian wählen wir konventionell den in Fig. 11 bezeichneten rechten Punkt und zählen in positiver Richtung. (Manchmal gibt man auch die Längen zwischen 180° und 360° negativ an.)

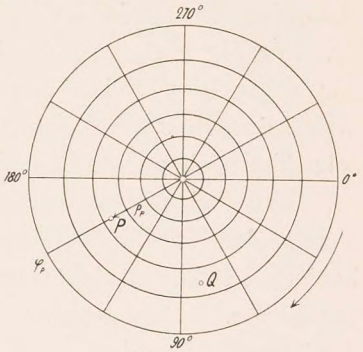


Fig. 11.

Mittels dieser Figur kann man aber die Winkelentfernung zweier Punkte P und Q nicht ablesen. Wir würden dazu einen durch P und Q gehenden Großkreis brauchen und eine Gradteilung auf diesem Großkreis bezw. auf seiner Projektion. Diese Aufgabe und zwar für beliebige Großkreise der Kugel wird durch das Wulffsche Netz gelöst.

Das Wulffsche Netz und seine Verwendung.

§ 8. Das 1902 in die kristallographische Praxis eingeführte Wulffsche Netz[1] (Beilage am Schluß dieser Schrift) gibt die stereographische Projektion aller Großkreise von 2 zu 2°, soweit sie auf der oberen Hemisphäre liegen, also nur die obere Hälfte eines jeden Großkreises. Weiterhin sind diese Projektionen eingeteilt, so daß Gradentfernungen von 2 zu 2° auf den Großkreisen abgelesen werden können. Das Wulffsche Netz erfüllt also genau denselben Zweck wie Millimeterpapier für ebene Zeichnungen.

Die Gradeinteilungen der Großkreisprojektionen bilden zusammen ein System von Kreisen, sind also Projektionen von Kleinkreisen, wie es die folgende Überlegung zeigt.

Denken wir uns die Großkreise alle durch einen Durchmesser des Äquators, etwa die Linie WO in Fig. 4 (S. 4) gelegt. Ein Kleinkreis senkrecht zur Linie WO und also senkrecht zur Äquator-

1) Zeitschr. f. Kristall. 1902, **36**, 14—18. Schon E. von Fedorow benutzte 1892 (Z. f. Krist. **20**, 359) das stereographische Netz von 20 cm Durchmesser, hat es aber nur verkleinert wiedergegeben.

ebene verteilt die sämtlichen Großkreise des Systems im gleichen Verhältnis. Ebenso gibt auf der Erde ein senkrecht zur Erdachse stehender Kleinkreis auf allen Meridianen denselben Breitengrad an. Für die Einteilung des Großkreissystems von 2 zu 2° brauchen wir daher eine Reihe von parallelen Kleinkreisen, die sich im Wulffschen Netz als Kreisbögen projizieren. Die zwei Kreissysteme schneiden sich gegenseitig überall unter Winkeln von 90° (§ 4).

Die bei der stereographischen Projektion zur Verwendung kommenden Großkreise schneiden die Äquatorebene in einer beliebigen Richtung, nicht bloß nach der Linie *WO*, wie oben angenommen. Man benutzt daher das Wulffsche Netz als eine drehbare Schablone. Die beiden geraden Linien durch das Zentrum des Netzes mit ihrer Einteilung liefern uns bei der Drehung des Netzes die Punkte der Fig. 11, welche die Eintragung nach Länge und Breite der Flächenpole ermöglichte. Eine Schablone nach Fig. 11 ist also neben dem Wulffschen Netz nicht mehr erforderlich.

Im folgenden werden die Projektionen der Großkreise im Wulffschen Netz als Meridiankreise, diejenigen der Kleinkreise als Parallelkreise bezeichnet.

Konstruktion eines Wulffschen Netzes. Das dieser Schrift beigegebene Netz hat aus Zweckmäßigkeitsgründen (um ein handliches Format des Heftes zu bewahren und die unangenehme Knickung der Netzschablone zu vermeiden) einen Durchmesser von 14 cm.[1] Man kann sich aber leicht selbst ein beliebig großes Netz herstellen, besonders unter Verwendung des unten erwähnten Kreisbogenlineals. Man versieht dazu einen Kreis des gewünschten Durchmessers mit einer Gradteilung, z. B. unter Verwendung des hier beigegebenen Netzes mit Hilfe von Pauspapier und Durchstechen der Punkte. Auf dem Kreise werden die Punkte 0°, 90° usw. festgelegt und zwei Diameter 0—180° und 90—270° gezogen. Wir wollen jetzt erst die Parallelkreise konstruieren. Für einen beliebigen Parallelkreis, z. B. *abc* in Fig. 12, sind schon zwei Punkte *a* und *c* auf dem Grundkreis gegeben. Sind die Kleinkreise genügend gekrümmt, um mit dem Zirkel (nötigenfalls durch eine Stange verlängert) konstruiert werden zu können, so suchen wir das Zentrum *R* auf der Verlängerung von *fe*, indem wir einen 90°-Winkel in *M* und *a* anlegen, wie in Fig. 12 angegeben.

1) Auf Pappe aufgezogene Wulffsche Netze mit 20 cm Durchmesser sind zum Preise von 0,35 M. durch die Schweizerbartsche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, käuflich.

Kreise mit großem Radius ziehen wir mit Hilfe des unten erwähnten Kreisbogenlineals und finden dazu einen dritten Punkt b des Kreisbogens, symmetrisch zu den beiden ersten, also auf der Linie ef liegend, indem wir die Linie ad anbringen. Man sieht die Richtigkeit dieser einfachen Konstruktion gleich ein, wenn man sich die Verhältnisse räumlich auf der Kugel vorstellt. Der Kreis abc ist die stereographische Projektion eines Kleinkreises senkrecht zum Äquator mit dem Pole e und dem sphärischen Radius ea. Der höchste Punkt dieses Kleinkreises projiziert sich innerhalb einer senkrecht zum Äquator stehenden und durch ef gehenden Ebene. Den Projektionsvorgang in dieser Ebene erhalten wir durch Senkrechtstellen des Zeichenblattes mit der Fig. 12.

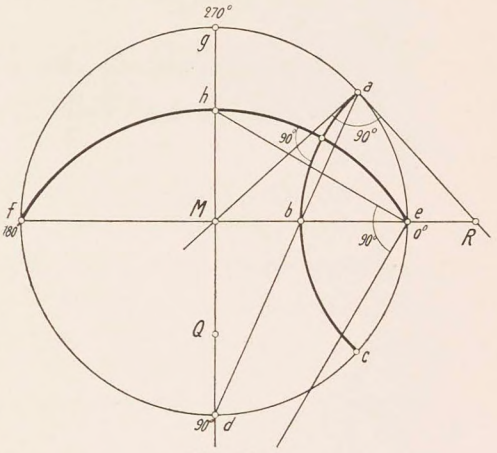


Fig. 12.

Die wie oben gefundene Gradteilung auf dem Diameter ef können wir auf den Diameter dg übertragen, weil ef und dg beide Großkreise senkrecht zur Äquatorebene darstellen. Durch die auf dg gefundenen Punkte werden jedesmal Kreisbögen mit der Sehne ef gezogen, entweder mittels des Kreisbogenlineals oder indem man das Zentrum Q (Fig. 12) konstruiert. Man sucht für die letztere Konstruktion die Projektion des Gegenpols h' (in Fig. 12 nicht mehr angegeben, vgl. § 15) zu h auf der Verlängerung des Diameters gd, indem man einen 90°-Winkel in h und e anlegt. Die Halbierung Q der Strecke hh' ist das gesuchte Zentrum.

Fig. 13.
Dreispitzzirkel
(ca. $^1/_2$ n. Gr.)

Das Wulffsche Netz wird am einfachsten so benutzt, daß man ein Stück Pauspapier mittels einer Reißzwecke drehbar mit dem Zentrum des Netzes verbindet. Das zentrale Loch im Pauspapier (und auch im Netz) vergrößert sich jedoch leicht, weshalb es besser ist, wenn auch etwas weniger bequem, einen Punkt auf dem Pauspapier immer mit dem Zentrum des Netzes genau zur Deckung zu bringen. Nach den Angaben von G. Wulff ist die Genauigkeit der nach dem Pausverfahren gemachten Konstruktionen ca. 30′, sie kann auf ca. 20′ gesteigert

werden, falls man sich eines Dreispitzzirkels[1] (Fig. 13) bedient, wie in § 9 angegeben. Saubere Zeichnungen erhält man, wenn man die benötigten Punkte des Netzes vom Pauspapier auf Zeichen-

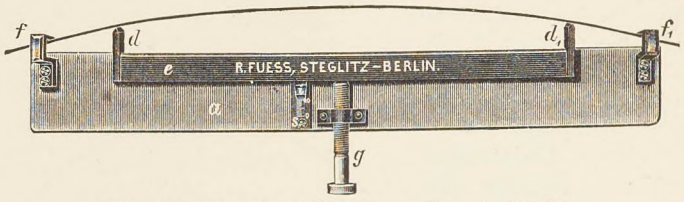


Fig. 14. Kreisbogenlineal (ca. $^2/_7$ nat. Größe).

papier überträgt (mittels des Dreispitzzirkels oder durch einfaches Durchstechen) und die Kreisbögen großen Durchmessers mit dem Kreisbogenlineal[1] (Fig. 14), diejenigen mit kleinerem Durchmesser mit dem gewöhnlichen Zirkel[2] einzeichnet. Der gewöhnliche Zirkel und das Kreisbogenlineal ergänzen sich gegenseitig.

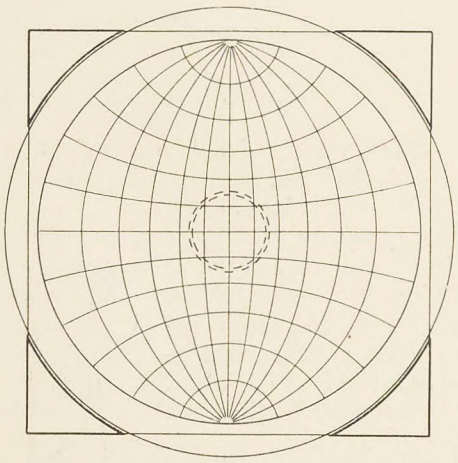


Fig. 15.

Für Demonstrationszwecke wird das Wulffsche Netz am zweckmäßigsten folgendermaßen montiert. Man befestigt eine Zeichnung des Netzes von etwa 70 cm Durchmesser auf einer dünnen flachen Metall- oder Glasscheibe, die auf einem Zapfen um ihr Zentrum vertikal drehbar ist (Fig. 15). Der Holzrahmen, der den Zapfen trägt, ragt an vier Ecken über die Drehscheibe hinaus und hält eine viereckige Mattglasscheibe zum Zeichnen der Projektion. Die freibleibenden Teile der Netzscheibe gestatten eine

1) Den Dreispitzzirkel nach v. Fedorow liefert die Firma Fueß, Steglitz bei Berlin, zu 10,50 M., das Kreisbogenlineal nach Wulff und v. Fedorow zu 46 M.

2) Es empfiehlt sich dafür sehr ein Wulffsches Netz ein für allemal mit den Zentren der Meridiankreise zu versehen (vgl. S. 11).

Drehung dieser. Die ganze Vorrichtung kann an die Wand aufgehängt werden[1].

Diese Ausführung unterscheidet sich von der von E. A. Wülfing angegebenen Vorrichtung wesentlich dadurch, daß der letztere das Netz fest montiert und die Mattglasscheibe drehbar anbringt. Die Erfahrung hat gezeigt, daß Anfänger durch die Drehung der Kristallprojektion leicht verwirrt werden. Es entspricht auch dem Sinne der Netzschablone, diese drehbar anzubringen, während der Kristall bezw. seine Projektion eine feste Lage behält. Nach Wülfing zeichnet man das Netz zweckmäßigerweise, von 10 zu 10°, weiß auf schwarzem Hintergrund, weil das Auge dann mehr Licht aufnimmt als im umgekehrten Falle.

Hauptaufgaben der stereographischen Projektion.

§ 9. Die Winkelentfernung zweier in stereographischer Projektion gegebenen Flächenpole. Man dreht die Schablone bis sich die Projektionen der beiden Pole auf einem Meridiankreis befinden. Die Winkelentfernung wird jetzt mit Hilfe der Parallelkreise unmittelbar abgezählt.

Es sei noch besonders hervorgehoben, daß Winkelentfernungen von Flächenpolen oder Durchstichpunkten von Kanten nur auf Meridiankreisen des Netzes (und auf dem Grundkreis) abgelesen werden dürfen, nicht auf Parallelkreisen, mit Ausnahme des mittleren, geradlinigen Parallelkreises, der ja die Projektion eines Großkreises ist.

Will man zur genaueren Bestimmung der Entfernung zweier Pole den Dreispitzzirkel benutzen, so bringt man eine Spitze in das Zentrum des Netzes, die beiden anderen in die betreffenden Projektionen. Man dreht jetzt den Zirkel um das im Zentrum stehende Bein so lange, bis die beiden anderen Spitzen auf einem Meridiankreis liegen und liest die Entfernung ab.

1) Eine solche Vorrichtung wurde von der Firma E. Zimmermann, Leipzig, Emilienstraße 21, nach meinen Angaben in guter Ausführung gefertigt.

Aufgabe. Von einem Augitkristall sind gegeben (vgl. V. Goldschmidt, Winkeltabellen, 1897, S. 283):

	φ	ϱ		φ	ϱ
a (100)	90°	90°,	also a' (100)	270°	90°
b (010)	0°	90°			
s ($\bar{1}11$)	334° 53′	33° 4′			
s' ($\bar{1}\bar{1}1$)	205° 7′	33° 4′			

Man bestimme mit Hilfe des Wulffschen Netzes die Winkel sa' und ss'.

Lösung: $sa' = 76° 34'$, $ss' = 59° 11'$.

§ 10. Andere Konstruktion der Winkelentfernung zweier Punkte. Sei in Fig. 16 P der projizierte Pol des Zonenkreises durch p und p_1 (Konstruktion siehe § 13 oder 15). Ziehen

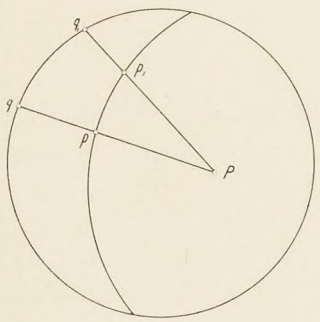


Fig. 16.

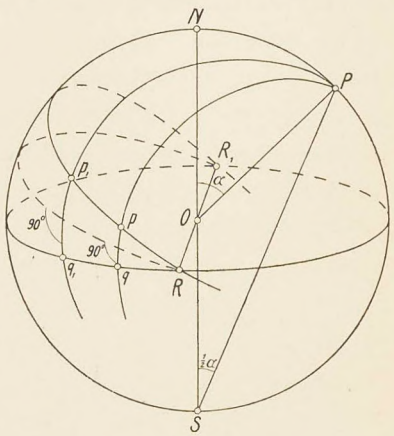


Fig. 17.

wir gerade Linien Pp und Pp_1, so schneiden diese auf dem Grundkreis einen Bogen qq_1 ab, der gleich pp_1 ist. Auf dem eingeteilten Grundkreis kann qq_1 unmittelbar abgelesen werden.

Die Richtigkeit dieser auf den ersten Blick wohl befremdenden Konstruktion zeigt sich folgendermaßen. Die Linien Pq und Pq_1 sind Projektionen von Kleinkreisen, die durch den Augenpunkt und durch den Pol P gehen. In der Fig. 17 sind die Verhältnisse räumlich gezeichnet, mit der Zeichenebene durch SP. RR' ist also senkrecht zur Zeichenebene. Weiterhin ist der Winkel $NSP = \frac{1}{2} \angle NOP$.

Legen wir durch RR_1 die Halbierungsebene zwischen den Kreisen durch pp_1 und qq_1, so ist diese Halbierungsebene senkrecht zu PS und die Punkte p und q, p_1 und q_1 sind symmetrisch in bezug auf diese Ebene. Folglich ist $pp_1 = qq_1$.

Der hier bewiesene Satz ist für die Konstruktion stereographischer Projektionen ohne Verwendung des Wulffschen Netzes von höchster Bedeutung.

§ 11. Der Winkel zweier Zonenkreise. Zwei Zonenkreise schneiden sich in einem Punkt P, der den Pol einer in beiden Zonen liegenden Fläche bezeichnet. Der Winkel α der beiden Zonenkreise in der Projektion gibt ohne weiteres den Winkel der Großkreise auf der Kugel. Man kann diesen Winkel mit Hilfe des Wulffschen Netzes ablesen durch folgende Konstruktion (Fig. 18).

Wir betrachten den Schnittpunkt P der beiden Zonenkreise als Pol eines Äquators. Alle Punkte dieses Äquators sind um 90° von P entfernt, die Projektionen zweier solcher Punkte Q und R messen wir auf den beiden Zonenkreisprojektionen ab, indem die letzteren nacheinander mit Meridiankreisen des Netzes zur Deckung gebracht werden. Der gesuchte Äquator ist ein Großkreis durch Q und R und die Entfernung QR ist gleich α, so wie man auch den Winkel zweier Erdmeridiane auf dem Äquator mißt.

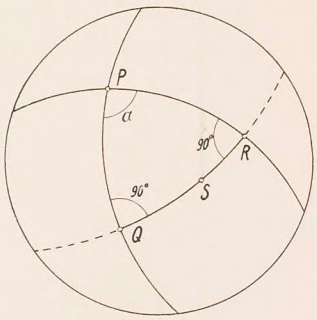


Fig. 18.

Für alle Punkte auf dem Grundkreis ist der Äquator eine gerade Linie durch das Zentrum.

Aus der vorhergehenden Konstruktion ergibt sich auch gleich wie man den Winkel α zweier Zonenkreise durch einen Großkreis in beliebige Stücke teilen kann. Man teilt dazu QR in dem gewünschten Verhältnis und bringt durch den gefundenen Punkt S und P einen Meridiankreis an. Besonders die Halbierung des Winkels zweier Großkreise ist eine bei der Kristalloptik häufig vorkommende Aufgabe.

§ 12. Der Zonenkreis zu einem gegebenen Pol. Ist nur der Pol P der Fig. 18 gegeben und wünscht man den Zonen- oder Äquatorkreis QR zu diesem Pol zu konstruieren, so wird man nicht einige beliebige Großkreise PQ und PR benutzen, um den Winkel von 90° abzusetzen, sondern den senkrecht zur Zeichenebene stehenden, der sich also als Gerade PM projiziert (Fig. 19).

Auf PM zählt man von P aus 90^0 ab und findet so einen Punkt T des gesuchten Zonenkreises. Weiterhin ist der Meridiankreis PT symmetrisch in bezug auf den gesuchten Zonenkreis, die Sehne SS' der Projektion muß deshalb senkrecht zu PT stehen. Man sieht auch gleich ein, daß nur in diesem Falle die Entfernungen PS und PS' gleich 90^0 sein können, wie es für Pol und Äquator notwendig ist.

Die Konstruktion des Zonenkreises wird mithin so ausgeführt, daß man den geradlinigen Parallelkreis des Netzes durch P legt und von P durch M 90^0 abzählt. Der Meridiankreis durch den so gefundenen Punkt T ist der gesuchte Zonenkreis.

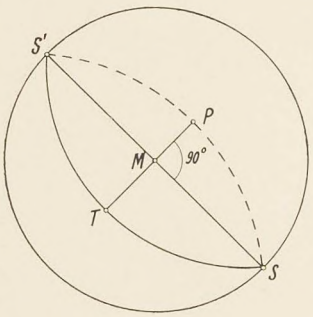


Fig. 19.

§ 13. Der Pol eines Zonenkreises, bezw. Durchstichpunkt einer Zonenachse.

Wollen wir den Pol eines Zonenkreises STS' (Fig. 19) bestimmen, so müssen wir die Konstruktion des § 12 umkehren, was ohne weitere Erläuterung einleuchten wird.

Die Normale zu einem Zonenkreis ist zugleich die Richtung der gemeinsamen Kante (oder Achse) der Zone. Der projizierte Pol P des Zonenkreises gibt also den Durchstichpunkt dieser Kante durch die Kugel in Projektion wieder, wenn man die Kante durch das Kugelzentrum gelegt denkt, während die Linie MP die Richtung der projizierten Kante darstellt. Diese einfache Wiedergabe von Kantenrichtungen ist besonders für das Kristallzeichnen aus der stereographischen Projektion wichtig (§ 35).

§ 14. Ort der Punkte, die um einen gewissen Winkelwert von einem Pol entfernt sind. In § 12 suchten wir den Ort der Punkte, die um 90^0 von P entfernt sind und fanden dafür einen Großkreis. Punkte, die um einen beliebigen Winkel α von P entfernt sind, liegen auf einem Kleinkreis, der sich wieder als Kreis projiziert (Fig. 20). P liegt zwar immer innerhalb dieses Kreises, aber nicht in seinem Zentrum. Letzteres wäre nur der Fall, wenn P mit M zusammenfällt. Die Konstruktion entspricht

der in § 12, indem wir durch P den geradlinigen Parallel- oder Meridiankreis legen und nach beiden Seiten von P α^0 absetzen (Q_1 und Q_2 in Fig. 20). Die gesuchte Kleinkreisprojektion muß durch Q_1 und Q_2 gehen und weiterhin symmetrisch zur Linie PM liegen, weil der Durchmesser PM zugleich einen Großkreis durch P und eine Ebene durch den Augenpunkt der Projektion darstellt.

Das Zentrum Z der Kleinkreisprojektion findet man durch Halbierung von $Q_1 Q_2$. Weil die Parallelkreise des Netzes Kreisbögen mit allen Radien von 0 bis ∞ enthalten, kann man in Ermangelung eines Zirkels die Parallelkreise des Netzes für die Konstruktion benutzen. Sollte Q_2 außerhalb des Grundkreises fallen, so kann man auf beliebigen Großkreisen durch P α^0 abtragen. Von den so gefundenen Punkten genügen schon drei für die Konstruktion des Kleinkreises. Liegt schließlich P auf dem Grundkreise, so benutzt man für den benötigten Kleinkreis unmittelbar einen Parallelkreis des Wulffschen Netzes, was die Konstruktion in diesem oft vorkommenden Fall sehr einfach macht.

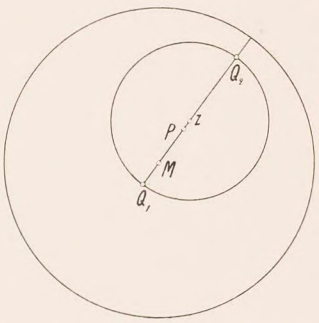


Fig. 20.

Sucht man einen Flächenpol, der um α^0 von P, um β^0 von einem zweiten Pole P' entfernt ist, so findet man durch Konstruktion der beiden Kleinkreisprojektionen im allgemeinen zwei Schnittpunkte, die der Anforderung genügen, ausgenommen wenn $\alpha + \beta < PP'$ oder $\alpha - \beta$ bezw. $\beta - \alpha > PP'$ ist. Die Konstruktion ist also nur eindeutig, wenn auch noch die Richtung des gesuchten Flächenpols bezüglich PP' gegeben ist.

Aufgabe. Gegeben von einem Anorthitkristall die Normalenwinkel $(100):(010) = 87^0\,6'$, $(100):(001) = 63^0\,57'$, $(010):(001) = 85^0\,50'$. Gesucht die stereographische Projektion der Basis (001), wenn die beiden anderen Pinakoide auf dem Grundkreise abgetragen werden. (Man wähle auch beliebige Lagen für (100) und (010) innerhalb des Grundkreises.)

Lösung: Liegt die Projektion von (010) in $\varphi = 0^0$, so gilt für die Basis $\varphi = 80^0\,33'$, $\varrho = 26^0\,14'$.

Lösung der obigen Aufgaben ohne Wulffsches Netz.

§ 15. Der Pol und Gegenpol zu einer gegebenen Großkreisprojektion. Die Projektion P des gesuchten Pols (Fig. 21) liegt auf der Normale zu RR_1, um 90^0 von T entfernt. T und P liegen auf einem Großkreis mit R als Pol. Entsprechend dem Satze von § 10 ist $T_1 P_1$ daher gleich 90^0. Wir kommen also zur folgenden Konstruktion.

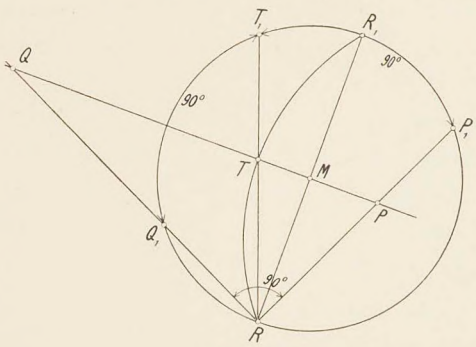


Fig. 21.

Man ziehe die gerade Linie RTT_1, trage auf dem Grundkreis $T_1 P_1 = 90^0$ ab und ziehe RP_1. Der Schnittpunkt P mit dem durch den Mittelpunkt M angebrachten Lot auf RR_1 ist die gesuchte Polprojektion.

In genau entsprechender Weise finden wir die Projektion Q des Gegenpols auf der unteren Hemisphäre. Der Winkel QRP beträgt 90^0.

§ 16. Die Großkreisprojektion zu einem gegebenen Pole. Wir kehren hierzu die Konstruktion des vorigen Paragraphen um. Man zieht die gerade Linie PM und RMR_1 senkrecht zu PM. Trägt man $P_1 T_1 = 90^0$ ab und zieht $T_1 R$, so ist T bekannt und damit ein dritter Punkt (neben R und R_1) zur Konstruktion des Kreises gegeben.

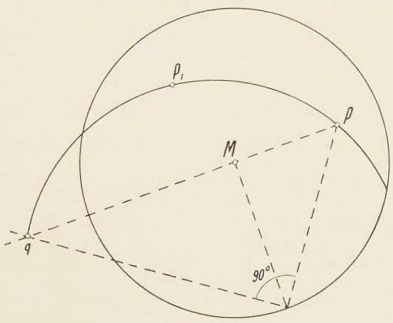


Fig. 22.

§ 17. Ein Zonenkreis durch zwei gegebene Punkte. Für diese Aufgabe sind verschiedene Konstruktionen angegeben worden, die je nach der Lage der beiden Punkte den Vorzug verdienen.

1. Wir bestimmen die Projektion des Gegenpols q zu p entsprechend Fig. 22 (vgl. § 15). Alle Kreise durch p und q sind Großkreisprojektionen, also auch ein Kreis durch p, p_1 und q, der mithin der gesuchte ist. Bei dieser Methode brauchen wir nur einen Kreis zu konstruieren.

2. Denken wir uns die räumliche Sehne zu der Projektion pp_1 (Fig. 23), welche die Projektionsebene in x schneidet. Die Ebenen aller durch p und p_1 angebrachten Kreise gehen durch diesen Punkt x. Schneidet ein solcher Kreis den Grundkreis, so finden wir außerdem die Schnittlinie der Kreisebene mit der Projektionsebene, z. B. nm für einen willkürlich durch p und p_1 gehenden Kreis $pp_1 nm$. Wir erhalten also

x als Schnittpunkt der projizierten Sehne pp_1 und der geraden Linie nm. Die Ebene des gesuchten Großkreises muß nicht nur durch x, sondern ebenfalls durch M gehen. Die Schnittlinie dieser Ebene mit der Projektionsebene ist daher xM, wodurch sich auch a und b ergeben.

Die Konstruktion ist also die folgende: Wir bringen einen beliebigen Kreis pp_1nm durch p und p_1 an, der den Grundkreis schneidet. Darauf ziehen wir die Geraden p_1p und nm, und durch den Schnittpunkt x die Gerade xM. Die gesuchte Großkreisprojektion geht durch a, p, p_1 und b.

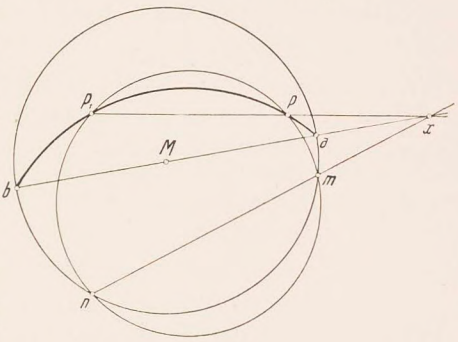


Fig. 23.

Diese Ausführung der Konstruktion wenden wir anstatt der unter 1 an, wenn die Projektionen der Gegenpole zu p und p_1 weit außerhalb des Grundkreises, p und p_1 also nahe an M liegen. Jetzt müssen wir zwei Kreise ziehen; sind jedoch p und p_1 ungefähr gleich

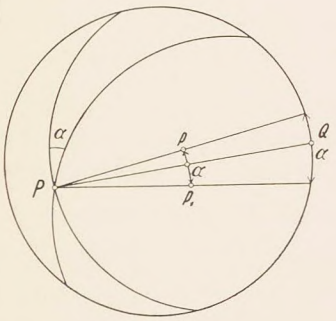


Fig. 24.

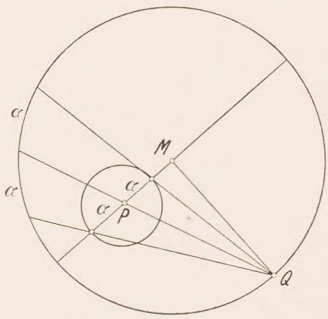


Fig. 25.

weit von M entfernt (und nicht sehr nahe bei einander), so wird der Abstand xM sehr groß.

3. Allgemein anwendbare Konstruktion. Wir konstruieren den Zonenkreis zum Pole p, ebenfalls zum Pole p_1. Der Schnittpunkt ist der Pol des gesuchten Großkreises.

Hier bleibt die ganze Konstruktion innerhalb des Grundkreises, wir brauchen aber drei Kreise.

§ 18. Der Winkel zweier Zonenkreise. Der Winkel zweier Zonenkreise ist dem Winkel der Normalen, also dem Abstande der Polprojektionen p und p_1 (Fig. 24) gleich. Der Schnittpunkt P ist die Projektion des Pols zu dem Zonenkreise pp_1, der Abstand α wird also in der üblichen Weise auf dem Grundkreise gemessen.

Wollen wir den Winkel α der Zonenkreise durch einen neuen Zonenkreis durch P in beliebige Stücke teilen, so brauchen wir diese Teilung nur beim α-Winkel auf dem Grundkreise vorzunehmen; der Teilungspunkt Q (Fig. 24) wird mit P verbunden, es schneidet dann PQ den Zonenkreis pp_1 in der Polprojektion des gesuchten Kreises.

§ 19. Ort der Punkte, die um einen gewissen Winkelwert von einem Pole entfernt sind. Sei P die Projektion des betreffenden Pols. Wie in § 14 erläutert wurde, ist der gesuchte Ort ein Kleinkreis, symmetrisch zu MP. Den Pol Q zu diesem Meridian finden wir auf dem Grundkreise, und jetzt können wir, entsprechend Fig. 25, die Konstruktion ausführen.

Vertauschung der Projektionsebene einer stereographischen Projektion.

§ 20. In Fig. 26 ist die stereographische Projektion eines Kristalls auf einer beliebigen Ebene, deren Pol sich im Zentrum M projiziert, angegeben. Wir wollen daraus die Projektion auf einer Ebene mit dem in P projizierten Pole ableiten.

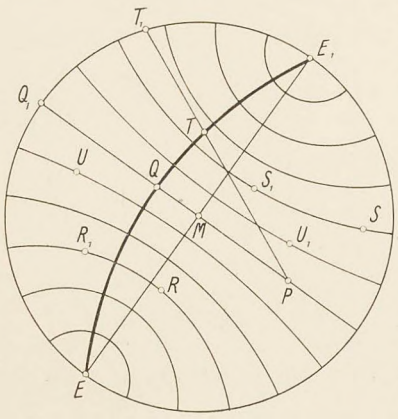


Fig. 26.

Wir konstruieren nach § 12 den zu P gehörigen Großkreis EQE_1. Dieser Großkreis soll Grundkreis werden, P daher mit M zusammenfallen. Denken wir uns die Kugel wie eine Erdkugel mit Meridianen und Breitekreisen versehen und den Süd- und Nordpol resp. mit E und E_1 zusammenfallend. Der Grundkreis (in der Zeichenebene) soll als Nullmeridian, der Großkreis EQE_1 mit einer Länge φ angenommen werden. Drehen wir jetzt die Kugel um EE_1 in der Richtung Q_1Q, während der zu projizierende Kristall eine feste Lage behält, so werden die feststehenden Flächenpole an den sich bewegenden Breitekreisen entlang gleiten. Die Bewegung hält so lange an, bis der Großkreis EQE_1 mit dem Nullmeridian, also mit der Zeichenebene, zusammen-

fällt. Jeder Flächenpol hat bei dieser Bewegung denselben Winkel φ auf seinem Breitekreis zurückgelegt, dessen Wert gleich PM ist.

Die Ausführung der Konstruktion ist also einfach die, daß man den geradlinigen Meridian des Wulffschen Netzes mit EE_1 zusammenfallen läßt und jeden Pol der Projektion auf seinem Parallelkreise um PM^0 verschiebt in einer solchen Richtung, daß P schließlich mit M zusammenfällt. Q kommt dadurch in Q_1, R in R_1, S in S_1 usw. Punkte links von der Ebene EQE_1 tauchen bei der Bewegung unter; gleichzeitig kommen diametral die Gegenpole auf die obere Halbkugel. Die Projektionen von Pol und Gegenpol legen innerhalb des Großkreises zusammen einen Weg φ zurück, man kann also auch die schließliche Lage der Projektionen dieser Gegenpole abzählen (vgl. U und U_1 in Fig. 26).

Die neue Lage von Punkten auf dem Kreise EQE_1, z. B. T, kann man auch so finden, daß man aus P eine Gerade durch T zieht, T_1 entspricht dann T (§ 10).

Die Übertragung auf eine andere Projektionsebene kommt besonders beim Kristallzeichnen in Betracht. Bei mehr verwickelten Projektionen führt man sie am besten so aus, daß man über das Pauspapier mit der ursprünglichen Zeichnung ein neues legt; das Netz ist auch dann noch gut sichtbar.

Aufgabe: Siehe die Aufgabe S. 39.

Flächensymbole und Zonenbeziehungen.

§ 21. Konstruktion der Achsenabschnitte der in stereographischer Projektion gegebenen Einheitsfläche. Seien drei Flächen A, B und C (Fig. 27) als Pinakoide in stereographischer Projektion gegeben und eine vierte Fläche P als Grundpyramide. Wir wollen die Achsenlängen graphisch ermitteln. Zur bequemen Übersicht nehmen wir die Pole der Endflächen A (100) und B (010) auf dem Grundkreise an, die Projektionsebene ist also senkrecht zur Achse c. Weiterhin konstruieren wir die Durchstichpunkte der Kristallachsen als Pole zu den Zonen AB, AC und BC. Wir müssen uns dabei vergegenwärtigen, ob die gefundenen Achsenpunkte a, b und c den positiven oder negativen Achsenrichtungen

entsprechen. Die Grundpyramide (111) schneidet die Achsen immer in den positiven Teilen, der Abstand $\overset{+}{a}P$ muß daher immer kleiner als 90°, $\bar{a}P$ größer als 90° sein und entsprechend für b und c. Dieser Unterschied ergibt sich sofort aus der stereographischen Projektion: in Fig. 27 treten $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\overset{+}{c}$ auf, weil P und $\bar{a}$ an verschiedenen Seiten von CB, P und $\bar{b}$ an verschiedenen Seiten von AC, P und $\overset{+}{c}$ an derselben Seite von AB liegen.

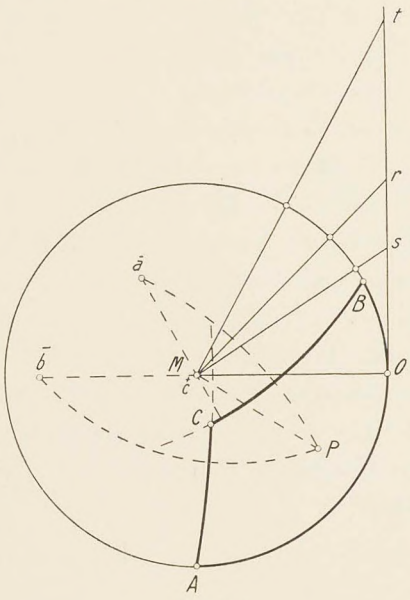


Fig. 27.

Die Achsenabschnitte für die Grundpyramide können wir entsprechend § 6 auf zwei Weisen feststellen.

1. Wir lesen die Winkel $\overset{+}{a}P$ (= Supplement zu $\bar{a}P$), $\overset{+}{b}P$ und $\overset{+}{c}P$ ab und konstruieren mit diesen Winkeln, die man von O aus auf dem Grundkreise abträgt, über MO rechtwinklige Dreiecke (rechter Winkel in O). Die Hypothenusen Mr, Ms und Mt dieser Dreiecke geben die Achsenlängen für P. Nimmt man MO als Einheit, so stellen die Längen Mr, Ms und Mt die Sekante der Winkel $\overset{+}{a}P$, $\overset{+}{b}P$ und $\overset{+}{c}P$ dar.

2. Wir bestimmen nach § 11 die Winkel ε, ζ, η und ϑ (Fig. 28, vgl. Fig. 9 und 10, S. 7 und 8), tragen diese von O aus auf dem Grundkreise ab und fällen Lote auf MO von den gefundenen Punkten aus. Die Längen dieser Lote geben das Verhältnis der Achsenabschnitte an.

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Lot aus } \varepsilon}{\text{Lot aus } \zeta}\left(= \frac{\sin \varepsilon}{\sin \zeta}\right).$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{Lot aus } \eta}{\text{Lot aus } \vartheta}\left(= \frac{\sin \eta}{\sin \vartheta}\right).$$

Bemerkung: Bei den symmetrischen Kristallsystemen vereinfacht sich die Konstruktion der Achsenabschnitte (§ 26).

Aufgabe: Von Axinit ist gegeben (Goldschmidtsche Tabellen, S. 58—59):

	φ	ϱ
(010)	0	90^0
(100)	$102^0\ 30'$	90^0
(001)	$-90^0\ 34'$	$7^0\ 58'$
(111)	$57^0\ 19'$	$53^0\ 8'$.

Man bestimme das Achsenverhältnis nach den beiden Methoden.

Lösung: $a:b:c = 0{,}7812:1:0{,}9771$.

§ 22. Bestimmung des Symbols einer beliebigen in stereographischer Projektion gegebenen Kristallfläche. Wir können mittels der Konstruktionen des § 21 die Achsenabschnitte jeder beliebigen Kristallfläche finden. Für Flächen aus der Zone der b-Achse müßte man bei der zweiten Konstruktionsart die Winkel bei B (Fig. 28) benutzen; man wird jedoch wohl meist die erste Methode verwenden.

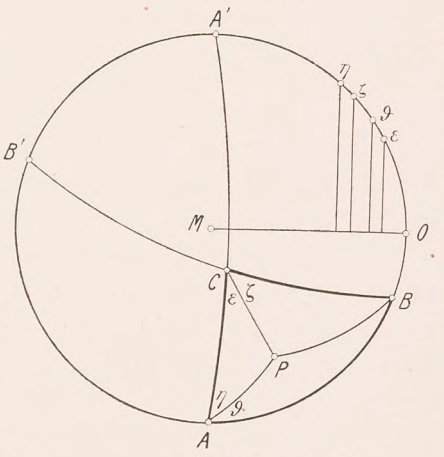


Fig. 28.

Für Polprojektionen außerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 28) ist das Vorzeichen der Achsenabschnitte z T. negativ, entsprechend der Flächenlage am Achsenkreuz, und zwar liegen in

$\triangle BCA'$ die Projektionen der Pole von Flächen $\bar{h}kl$,
in $\triangle B'CA'$ „ „ „ „ „ „ $\bar{h}\bar{k}l$,
in $\triangle B'CA$ „ „ „ „ „ „ $h\bar{k}l$.

Alle Flächen, die sich innerhalb des Grundkreises projizieren, haben l positiv bei der gewählten Aufstellung mit c im Zentrum.

Aus der Lage des gegebenen Pols, dessen Symbol gesucht wird, sehen wir also schon ohne weiteres, welchen Charakter das Symbol in bezug auf Vorzeichen besitzt.

Die Anwendung der Sekansbeziehung bietet gar keine Schwierigkeit: Winkel $> 90^0$ (und $< 180^0$) haben einen negativen Sekans, wie es sich aus der geometrischen Darstellung des Sekans gleich ergibt.

Bei Anwendung der Sinusbeziehung müssen wir die Winkel ε, ζ, η und ϑ folgerichtig definieren, um auch hier die graphische Ermittelung des Symbols in allen Fällen nach dem Schema ausführen zu können:

Verschiebt sich P in Fig. 28 aus
$\triangle ABC$ in $\triangle ACB'$, so wird ε neg, $\zeta > ACB$, η neg. und $\vartheta > CAB$.

Verschiebt sich P aus
$\triangle ABC$ in $\triangle CBA'$, so wird $\varepsilon > ACB$, ζ neg.

Verschiebt sich P aus
$\triangle ABC$ in $\triangle B'CA'$, so wird η neg., $\vartheta > CAB$, ε und ζ behalten ihre Zeichen bei.

Bei dieser Annahme über die Messung der Winkelwerte können wir die Sinuskonstruktion in jedem Fall anwenden, genau so wie in Fig. 28 angegeben.

Wir finden also für die unbekannte Fläche ein Achsenverhältnis $a' : b' : c'$ bezw. $a' : 1 : c'$, das im Vergleich zum Einheitsverhältnis $a : 1 : c$ das gesuchte Weißsche Symbol liefert. Das Millersche Symbol (hkl) ergibt sich bekanntlich reziprok zum Weißschen.

Aufgabe: Unter Benutzung der Zahlen in der Aufgabe S. 23 bestimme man die Symbole der Flächen ϱ, μ und i am Axinit, wenn gegeben ist

	φ	ϱ
ϱ	$44^0\ 19'$	$73^0\ 40'$
μ	$-78^0\ 10'$	$69^0\ 50'$
i	$161^0\ 8'$	$73^0\ 56'$

Lösung: $\varrho = (231)$, $\mu = (\bar{2}01)$, $i = (1\bar{3}1)$.

Ist die stereographische Projektion eines Kristalls gegeben und wollen wir die Flächen auf ein anderes Achsenkreuz beziehen, z. B. um einfachere Symbole zu erhalten, wie es im triklinen und monoklinen System oft vorkommt, so läßt sich dies mit Hilfe der obigen Konstruktionen ebenfalls sehr leicht ausführen.

§ 23. Ermittelung der Polprojektion einer Fläche, deren Achsenabschnitte in ihrem Verhältnis bekannt sind. Oft sind von einem Kristall die Elemente α, β, γ und $a:b:c$ gegeben und die Symbole der vorhandenen Flächen. Wünscht man eine solche Angabe in Projektion bezw. in Zeichnung zu bringen, so muß man das in § 22 beschriebene Verfahren umkehren. Wir nehmen einstweilen an, daß φ und ϱ der Endflächen gegeben sind, die Bestimmung dieser aus α, β und γ ist § 25 erwähnt. Jetzt wollen wir die Projektion einer Fläche $(h\,k\,l)$ konstruieren.

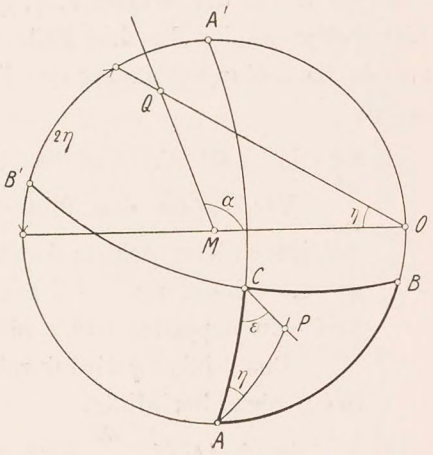
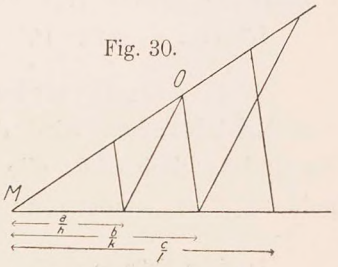


Fig. 29.

Zur Anwendung der Sekansmethode wäre das Verhältnis des Abstandes OP (Fig. 9) zu einem Achsenabschnitt notwendig, was nur durch eine ziemlich umständliche Konstruktion ermittelt werden kann. Dagegen finden wir nach der Sinusmethode die Winkel ε, ζ, η und ϑ in Dreiecken, deren einer Winkel durch einen Achsenwinkel (α oder γ) gegeben ist, während das Verhältnis der anliegenden Seiten bekannt ist. Wir wählen also die zweite Methode und verfahren folgendermaßen (Fig. 29).

Den Abschnitt $\frac{b}{k}$ auf der b-Achse machen wir gleich MO und tragen von O aus auf dem Grundkreis den Winkel α ab. MQ sei der Abschnitt $\frac{c}{l}$ auf der c-Achse im richtigen Verhältnis zu $\frac{b}{k}$.[1]

1) Die Reduktion der Längen der Achsenabschnitte wird so ausgeführt, daß man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels (Fig. 30) MO abträgt, auf dem anderen Schenkel $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{k}$ und $\frac{c}{l}$. Man kann entweder $\frac{b}{k}$ auf MO reduzieren oder $\frac{a}{h}$ (wie unter 1. § 23).

Fig. 30.


Der Winkel η kann dann auf dem Grundkreise in doppelter Größe abgelesen werden.

In derselben Weise finden wir den Winkel ε mit γ als Ausgangswinkel des Dreiecks. Diese beiden Winkel werden in das Dreieck ABC eingetragen, der Schnittpunkt der beiden so gefundenen Kreise ist die gesuchte Polprojektion P.

Sind Achsenabschnitte negativ, so müssen wir das in § 22 über die Werte der Winkel ε, ζ, η und ϑ Gesagte berücksichtigen. Wir wollen wieder die drei Fälle einzeln betrachten (die man sich mittels Darstellungen analog der Fig. 9 [S. 7] noch näher klarlegen kann):

1. $\bar{h}kl$ in $\triangle BCA'$. Um den Winkel ζ zu finden, machen wir $\frac{a}{h} = MO$,[1] setzen den Winkel γ von O aus ab und tragen $\frac{b}{k}$ ein, jedoch jetzt nicht in der Richtung MQ, sondern in entgegengesetzter Richtung. $-\zeta$ kann dann wieder auf dem Grundkreise in doppelter Größe abgelesen werden.

   Der Winkel η wird durch das negative Zeichen im Symbol $(\bar{h}kl)$ nicht beeinflußt.

2. $h\bar{k}l$ in $\triangle ACB'$. $\frac{b}{k}$ wird gleich MO gemacht, $\frac{a}{h}$ auf der negativen Seite des Schenkels von γ abgetragen, wie oben angegeben und $-\varepsilon$ abgelesen. Ebenso verfährt man für $-\eta$ mittels α und $\frac{c}{l}$.

3. $\bar{h}\bar{k}l$ in $\triangle B'CA'$. Wir finden $-\eta$ wie oben unter 2. Der gesuchte Pol ist der Schnittpunkt des Großkreises für $-\eta$ und der Verlängerung des Kreises für $+\varepsilon$.

Aufgabe: Man konstruiere die Projektionen von e (021) und v ($\bar{2}\bar{4}1$) für Anorthit (vgl. Aufgabe S. 17); $a:b:c = 0{,}6347:1:0{,}5501$.

Lösung: $\varphi_e = 22^0\,19'$ $\varrho_e = 52^0\,0'$; $\varphi_v = -147^0\,3'$ $\varrho_v = 69^0\,19'$.

§ 24. Zonenbeziehungen. Die Ermittelung des Symbols von Kristallflächen wird durch die Zonenregeln sehr vereinfacht. Es sind nämlich nicht alle Punkte eines Zonenkreises als Flächenpole möglich, sondern nur solche, wo zwei Zonen sich schneiden

1) Siehe Fußnote S. 25.

und außerdem die Indizes der Flächen bei richtiger Aufstellung des Kristalls einfache Zahlen darstellen (abgesehen von „Vizinalflächen“).

Daß Schnittpunkte zweier Zonenkreise immer möglichen Kristallflächenpolen entsprechen, sieht man gleich ein, wenn man bedenkt, daß die Zonenachse eine mögliche Kristallkante darstellt. Eine Fläche in zwei Zonen geht daher zwei möglichen Kantenrichtungen parallel und ist dadurch vollständig bestimmt.

Die Zonenregeln mögen hier kurz zusammengefaßt werden, für die Beweise sei z. B. auf Groths Physikalische Kristallographie 4. Aufl. S. 307 — 314 (für das Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse vgl. Liebisch, Grundriß der physikalischen Kristallographie, 1896, S. 31—33) verwiesen.

1. Die Indizes $[u\,v\,w]$ einer durch zwei Flächen $(h_1\,k_1\,l_1)$ und $(h_2\,k_2\,l_2)$ bestimmten Zone werden mittels der folgenden Gleichungen gefunden

$$h_1\,u + k_1\,v + l_1\,w = 0$$
$$h_2\,u + k_2\,v + l_2\,w = 0$$

$$\text{oder } u = \begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ k_2 & l_2 \end{vmatrix} = k_1\,l_2 - l_1\,k_2;\quad v = \begin{vmatrix} l_1 & h_1 \\ l_2 & h_2 \end{vmatrix} = l_1\,h_2 - h_1\,l_2;$$

$$w = \begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix} = h_1\,k_2 - k_1\,h_2.$$

Man wendet diese Beziehungen am sichersten an, wenn man nach dem folgenden Schema kreuzweise multipliziert:

$$\begin{array}{c|cccc|c} h_1 & k_1 & l_1 & h_1 & k_1 & l_1 \\ & \times & \times & \times & & \\ h_2 & \underbrace{k_2} & \underbrace{l_2} & \underbrace{h_2} & \underbrace{k_2} & l_2 \\ & u & v & w & & \end{array}$$

2. Eine Fläche $(h\,k\,l)$ liegt in der Zone $[u\,v\,w]$, wenn die Beziehung gilt:

$$h\,u + k\,v + l\,w = 0.$$

3. Drei Flächen $(h_1\,k_1\,l_1)$, $(h_2\,k_2\,l_2)$ und $(h_3\,k_3\,l_3)$ liegen in einer Zone, wenn die Gleichungen erfüllt sind

$$h_1\,u + k_1\,v + l_1\,w = 0$$
$$h_2\,u + k_2\,v + l_2\,w = 0$$
$$h_3\,u + k_3\,v + l_3\,w = 0$$

also $$\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder $$h_1(k_2 l_3 - l_2 k_3) + k_1(l_2 h_3 - h_2 l_3) + l_1(h_2 k_3 - k_2 h_3) = 0.$$

3 a. Wenn eine Zone durch $(h_1\, k_1\, l_1)$ und $(h_2\, k_2\, l_2)$ bestimmt ist, so liegt auch die Fläche $(h_1 + h_2,\ k_1 + k_2,\ l_1 + l_2)$ in dieser Zone, wie es sich durch Addition der beiden ersten Gleichungen unter 3 unmittelbar ergibt. Die letztere Fläche ist die einfachste zwischen $(h_1\, k_1\, l_1)$ und $(h_2\, k_2\, l_2)$ liegende. So ist z. B. das Ikositetraeder (211) die einfachste Kantenabstumpfung zwischen dem Würfel (100) und dem Oktaeder (111). Darauf folgen die Flächen $(h_1 + 2\,h_2,\ k_1 + 2\,k_2,\ l_1 + 2\,l_2)$ und $(2\,h_1 + h_2,\ 2\,k_1 + k_2,\ 2\,l_1 + l_2)$ usw.

3 b. Sind $(h_1\, k_1\, l_1)$ und $(h_2\, k_2\, l_2)$ kristallographisch gleich, so bildet $(h_1 + h_2,\ k_1 + k_2,\ l_1 + l_2)$ die gerade Abstumpfung der Kanten zwischen $(h_1\, k_1\, l_1)$ und $(h_2\, k_2\, l_2)$. So halbiert der Pol (512) den Abstand zwischen (231) und (3$\bar{2}$1) eines tetragonalen Trapezoeders.

Sind $(h_1\, k_1\, l_1)$ und $(h_2\, k_2\, l_2)$ außerdem spiegelbildlich gleich, so hat die Symmetrieebene das Symbol $(h_1 - h_2,\ k_1 - k_2,\ l_1 - l_2)$ als gerade Abstumpfung von $(h_1\, k_1\, l_1)$ und der Gegenfläche von $(h_2\, k_2\, l_2)$. Die letztere Fläche braucht im übrigen keine kristallographisch mögliche zu sein (wie z. B. in der domatischen Klasse des monoklinen Systems).

3 c. Alle Flächen $(h\, k\, l)$ in der Zone eines Pinakoids, z. B. (100) haben ein konstantes Verhältnis von k und l, also der Indizes, die im betreffenden Pinakoid gleich Null sind, und umgekehrt. Hieraus ergibt sich z. B. gleich, daß die Flächen (012) (Pyramidenwürfel), (112) (Ikositetraeder), (212) (Triakisoktaeder), (312) (Hexakisoktaeder) mit (100) (Würfel) in einer Zone liegen.

Die hier genannte einfache Beziehung folgt unmittelbar aus den Gleichungen unter 3 (k_1 und l_1 sind Null, u daher auch; weil die Zone, also v und w, gegeben ist, muß das Verhältnis $\frac{k_2}{l_2}$, $\frac{k_3}{l_3}$ usw. konstant sein). Auch kann man sich von der Richtigkeit des Satzes durch eine räumliche Vorstellung leicht überzeugen: die betreffenden Flächen können alle durch eine gerade Linie in (100) gelegt werden.

4. Die Indizes einer Fläche $(h\,k\,l)$ in zwei Zonen $[u_1\,v_1\,w_1]$ und $[u_2\,v_2\,w_2]$ ergeben sich folgendermaßen:

$$h\,u_1 + k\,v_1 + l\,w_1 = 0$$
$$h\,u_2 + k\,v_2 + l\,w_2 = 0$$

also: $$h = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = v_1\,w_2 - w_1\,v_2; \quad k = \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} = w_1\,u_2 - u_1\,w_2;$$

$$l = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1\,v_2 - v_1\,u_2;$$

oder durch kreuzweises Multiplizieren:

$$\begin{array}{c|c|c} u_1 & v_1\ w_1\ u_1\ v_1 & w_1 \\ & \times\ \times\ \times & \\ u_2 & \underbrace{v_2\ w_2\ u_2\ v_2} & w_2 \\ & h\quad k\quad l & \end{array}$$

5. Das Doppelverhältnis bei vier tautozonalen Flächen.

Liegen die Flächen $P(h_1\,k_1\,l_1)$, $Q(h_2\,k_2\,l_2)$, $R(h_3\,k_3\,l_3)$ und $S(h_4\,k_4\,l_4)$ in einer Zone, so gilt die Beziehung:

$$\frac{\sin PR}{\sin QR} : \frac{\sin PS}{\sin QS} = p : q,$$

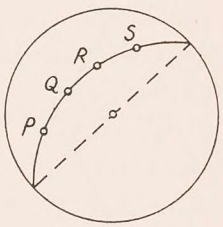


Fig. 31.

indem

$$p = \frac{k_1\,l_3 - l_1\,k_3}{k_2\,l_3 - l_2\,k_3} = \frac{l_1\,h_3 - h_1\,l_3}{l_2\,h_3 - h_2\,l_3} = \frac{h_1\,k_3 - k_1\,h_3}{h_2\,k_3 - k_2\,h_3}$$

und $$q = \frac{k_1\,l_4 - l_1\,k_4}{k_2\,l_4 - l_2\,k_4} = \frac{l_1\,h_4 - h_1\,l_4}{l_2\,h_4 - h_2\,l_4} = \frac{h_1\,k_4 - k_1\,h_4}{h_2\,k_4 - k_2\,h_4}.$$

Man sieht, daß der erste Ausdruck für p im Zähler den Zonenindex u für die Kombination der Flächen P und R und im Nenner u für die Kombination QR führt. Dasselbe gilt im zweiten Ausdruck für v, im dritten für w. Die drei Flächen P, Q und R liegen in einer Zone und deshalb ist $u:v:w$ für die Kombination PR gleich $u:v:w$ für QR oder $\frac{u_{PR}}{u_{QR}} = \frac{v_{PR}}{v_{QR}} = \frac{w_{PR}}{w_{QR}}$. In derselben Weise ergibt sich die Gleichheit der drei Ausdrücke für q. Wir finden also für ein und dasselbe Doppelverhältnis der Sinus neun Ausdrücke, von denen jedoch oft einige $\frac{0}{0}$, also unbestimmt werden.

Man kann mittels dieser Beziehung entweder $(h\,k\,l)$ einer der vier Flächen berechnen, wenn die drei Winkel bekannt sind, oder

umgekehrt einen Winkel aus den bekannten Indizes der vier Flächen. Für die letztere Aufgabe kann man das linke Glied unter eine Form bringen, die nur drei Winkel enthält:

$$\frac{\sin PR}{\sin QR} : \frac{\sin PS}{\sin QS} = \frac{\cot PS - \cot PQ}{\cot PR - \cot PQ}.$$

(Für diese Umformung braucht man nur QR durch $PR - PQ$, QS durch $PS - PQ$ zu ersetzen.)

Bei Kristallberechnungen hat man oft Gelegenheit, das Doppelverhältnis zu benutzen.

Bemerkung. Bei Anwendung der Zonenregeln auf hexagonale Kristalle, deren Flächen in der Bravaisschen Art mit vier

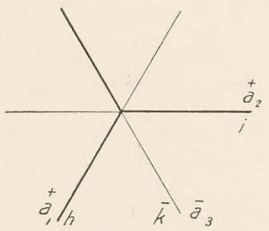


Fig. 32.

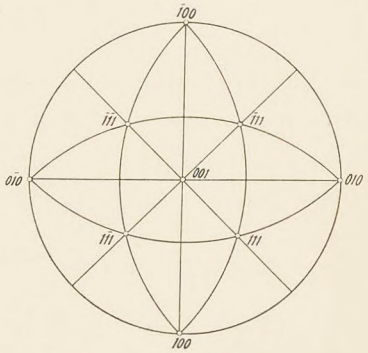


Fig. 33.

Indizes $(h\,i\,k\,l)$ bezeichnet sind (Fig. 32), werden nur die Indizes h, i und l benutzt. k ergibt sich immer nach der Beziehung:

$$k = -(h+i).$$

Aufgabe: Aus den in Fig. 33 angegebenen Hauptzonen des regulären Systems die Pole der übrigen einfachsten holoedrischen Formen $\{110\}$, $\{210\}$, $\{112\}$, $\{221\}$, $\{321\}$ abzuleiten (mit Hilfe des Wulffschen Netzes).

Das in Fig. 33 gezeichnete Neunzonensystem kehrt auch bei den anderen Kristallsystemen wieder, nur mit geringerer Symmetrie.

Graphische Kristallberechnung in den verschiedenen Systemen.

§ 25. Triklines System. In den vorhergehenden Paragraphen ist das zur graphischen Berechnung von Kristallen Erforderliche enthalten. Es wurde dort auf Symmetrie keine Rücksicht

genommen, die Ausführungen gelten daher für trikline Kristalle, während solche der anderen Systeme als Spezialfälle zu behandeln sind.

Nehmen wir den allgemeinen Fall, daß man bei einem gegebenen Kristall von den vorhandenen Flächen die Länge φ und Polardistanz ϱ in bezug auf einen willkürlich gewählten Nullmeridian und Nordpol bestimmt hat (etwa mittels des zweikreisigen Goniometers). Wir tragen die Pole mit Hilfe des Wulffschen Netzes ein und wählen drei derselben zu Polen der Endflächen A, B und C, einen vierten zum Pol der Grundfläche P, oder irgend einer anderen Fläche bekannten Symbols. Manchmal wird es auch angebracht sein, die Pole der Endflächen aus dem Zonenverband zu ermitteln (vgl. untenstehende Aufgabe). Es brauchen nur vier Flächen, von denen keine drei in einer Zone liegen, gemessen und mit Symbolen belegt zu werden, um die Kristallelemente berechnen zu können. — Jetzt bestimmen wir die Achsenwinkel aus den Winkeln des sphärischen Dreiecks $A\,B\,C$, ebenfalls die Durchstichpunkte der Achsen nach § 13 und die Achsenlängen nach einer der beiden Methoden von § 21.

Wir ermitteln die im Kristall vorhandenen Zonen bezw. Kantenrichtungen durch Drehung der Projektion auf der Netzschablone und tragen die Zonenkreise ein. Die Symbole der verschiedenen Flächen werden entweder aus ihren Achsenabschnitten oder durch die Zonenregeln bestimmt. Schließlich kann man, um die übliche Aufstellung zu erhalten, die Zone $A\,B$ nach § 20 in die Zeichenebene bringen.

Aufgabe: Von einem Albitkristall sind gemessen (vgl. Goldschmidtsche Tabellen, S. 140):

	φ	ϱ
P (001)	$81^0\ 51\frac{1}{2}'$	$27^0\ 1'$
M (010)	0^0	90^0
T (110)	$60^0\ 30\frac{1}{2}'$	90^0
x ($\bar{1}01$)	$-80^0\ 54'$	$25^0\ 48'$ [1]
n	$154^0\ 16'$	$49^0\ 18'$
o	$-135^0\ 21'$	$34^0\ 11\frac{1}{2}'$
γ	$2^0\ 13'$	$19^0\ 31'$

Man bestimme graphisch die Elemente α, β, γ und $a:b:c$, ferner die Symbole von n, o und γ.

1) N. B. Goldschmidtsche Tabellen S. 404.

Lösung: $\alpha = 94^0\ 15'$, $\beta = 116^0\ 47'$, $\gamma = 87^0\ 52'$.
$a:b:c = 0{,}6366 : 1 : 0{,}5582$, $n = (0\bar{2}1)$, $o = (\bar{1}\bar{1}1)$, $\gamma = (\bar{1}12)$.

Sind mit dem einkreisigen Goniometer Winkel von Flächen zu Flächen gemessen und A, B und C als Endflächen gewählt, so bringt man A und B in richtiger Entfernung auf dem Grundkreise an; mit Hilfe der Parallelkreise des Netzes (§ 14) wird C in einer Entfernung AC von A, BC von B eingetragen. Auch die übrigen Flächen ergeben sich nach den bekannten Konstruktionen, wobei sich besonders Winkel ausgehend von Flächenpolen des Grundkreises, also von Flächen aus der Zone der c-Achse, sehr leicht einzeichnen lassen.

Umgekehrt können die Achsenwinkel α, β und γ gegeben sein, aus denen man die Lage von A, B und C ableiten will. Diese Aufgabe kommt auf die Konstruktion eines sphärischen Dreiecks, dessen Winkel gegeben sind, heraus. Wir wollen A und B wieder auf dem Grundkreise eintragen (obgleich diese Spezialisierung keine weitere Rolle spielt), die Projektion des Durchstichpunktes der Achse c liegt dann im Zentrum. Jetzt zählen wir auf dem zum Pole A gehörigen (geradlinigen) Zonenkreis den Winkel $180\text{-}\alpha$ ab (Fig. 34). Wir finden dadurch den Zonenkreis AC und den zugehörigen Durchstichpunkt der Achse b (in Fig. 34 $\bar{b}$, vgl. § 21). Die Achse $\bar{a}$ liegt um γ^0 von $\bar{b}$, um $180\text{-}\beta^0$ von $\overset{+}{c}$ ab, kann daher als Durchschnittspunkt eines azentrischen und eines zentralen Kreises konstruiert werden. Damit ist der Zonenkreis BC und mithin die Lage von B und C bekannt.

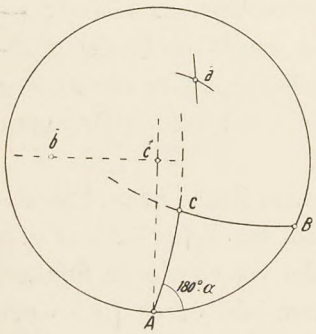


Fig. 34.

§ 26. Monoklines System. Die für das trikline System erforderlichen Konstruktionen vereinfachen sich in den übrigen Kristallsystemen entsprechend der Symmetrie. Wir wollen hier wie auch bei den übrigen Systemen nur die holoedrischen Klassen besprechen. Die nachfolgenden Ableitungen bleiben im allgemeinen auch für die Hemiedrien gültig, bei welchen jedesmal ein Teil der holoedrischen Flächen fortfällt. Als ein Beispiel ist eine Klasse des

trigonalen Systems und zwar die ditrigonal-skalenoedrische ausführlicher behandelt (§ 30). In den Figuren 35—42 sind die durch Symmetrie bedingten Werte von 90, 60, 45 und 30° an den betreffenden Stellen für die verschiedenen Kristallsysteme eingetragen. Besonders bei der rechnenden Kristallbestimmung sind diese Beziehungen von Wichtigkeit. Aber auch schon die graphische Rechnung, namentlich zur Ermittelung des Achsenverhältnisses und des Symbols der Kristallflächen, vereinfacht sich wesentlich bei symmetrischer Ausbildung der Kristalle.

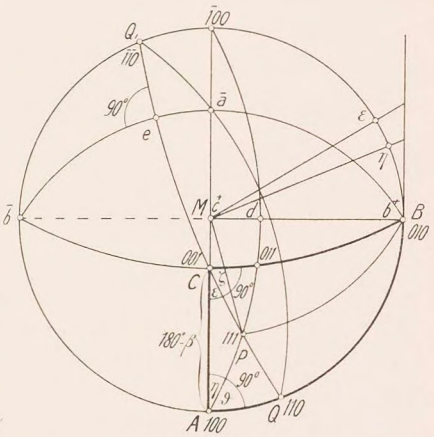


Fig. 35.

In der für das monokline System gültigen Fig. 35 sind α und γ, also ebenfalls BC und AB gleich 90°. Der Abstand AC entspricht $180° - \beta$. In bezug auf die Ermittelung des Achsenverhältnisses und der Flächensymbole ergibt sich: Infolge der monoklinen Symmetrie kommen die beiden Methoden des § 6 bezw. 21 auf dasselbe heraus.

Wir verwenden, um dies einzusehen, einen bekannten Satz aus der sphärischen Trigonometrie: ein Großkreisbogen aus einer Ecke des Dreiecks senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite teilt diese Seite in Stücke, deren Cosinus sich verhalten wie die Cosinus der anliegenden Seiten.

Z. B. in $\triangle MPB$ (Fig. 35) $\cos Md : \cos dB = \cos MP : \cos PB$.

In § 21 haben wir gesehen:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sec cP}{\sec bP} = \frac{\cos bP}{\cos cP}.$$

Also:

$$\frac{c}{b} = \frac{\cos dB}{\cos Md}, \text{ und weil } Bd = 90° - Md$$

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg} \eta.$$

Für das Verhältnis $a:b$ benutzen wir nicht P, sondern die Prismenfläche Q (110).

$$\frac{a}{b} = \frac{\sec\,(180^0 - Q\bar{a})}{\sec\,QB} = \frac{\sec\,Q_1\bar{a}}{\sec\,Q_1\bar{b}} = \frac{\cos\,Q_1\bar{b}}{\cos\,Q_1\bar{a}}.$$

Der Winkel bei e ist wieder 90^0 (weil C der Pol zum Zonenkreise $\bar{b}\,\bar{a}\,\overset{+}{b}$ ist), also:

$$\frac{a}{\underline{b}} = \text{tg}\;e\bar{a} = \underline{\text{tg}\;\varepsilon}.$$

Verwenden wir dagegen die zweite Methode des § 21, so finden wir ebenfalls

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\,\varepsilon}{\sin\,\zeta} = \frac{\sin\,\varepsilon}{\sin\,(90^0 - \varepsilon)} = \text{tg}\;\varepsilon \text{ und entsprechend } \frac{c}{b} = \text{tg}\;\eta.$$

Für die Konstruktion brauchen wir also nur zwei Winkel (ε und η) von B aus abzutragen, wir finden dann auf der Tangente in B die Achsenlängen a und c im Verhältnis zur Strecke MB, welche b darstellt.

Verwenden wir eine Fläche $(h\,k\,l)$ zur Ermittelung des Achsenverhältnisses, so finden wir dieses in genau entsprechender Weise. Und auch umgekehrt können wir die Lage einer Fläche, etwa (321), in derselben Art feststellen, wenn $a:b:c$ gegeben ist. Wir machen dazu $b = MB$ und tragen entsprechende Längen a und c auf der Tangente in B ab. Jetzt verkleinern wir die Strecke für a auf $^2/_3$ und verdoppeln diejenige für c. Verbinden wir die neuen Punkte mit M, so können wir auf dem Grundkreise ε und η für die gesuchte Fläche (321) ablesen.

Aufgabe. Ein Gipskristall der gewöhnlichsten Ausbildung hat die Formen $b\{010\}$, $f\{110\}$ und $l\{111\}$. Wenn die Normalenwinkel gegeben sind

$$(010):(110) = 55^0\;45'$$
$$(010):(111) = 71^0\;54'$$
$$(110):(111) = 49^0\;9'$$

bestimme man graphisch die Kristallelemente.

Lösung: $\beta = 99^0\;18'$ $a:b:c = 0{,}6899:1:0{,}4124$.

§ 27. Rhombisches System. In diesem System gelten selbstverständlich die für das monokline abgeleiteten Vereinfachungen.

Man wird jedoch bemerken, daß der Winkel β bei den Konstruktionen der Achsenabschnitte im vorigen Paragraph nicht verwendet wurde, entsprechend wird man auch im rhombischen System für diese Konstruktion keinen Vorteil davon erwarten können, daß der Winkel $\beta = 90^0$ geworden ist. Auch im rhombischen System hat die Grundpyramide noch eine nicht durch Symmetrie beschränkte Lage am Kristall (Fig. 36).

Aufgabe. Der Aragonit von Bilin führt oft die Formen $b\{010\}$, $m\{110\}$, $k\{011\}$, $p\{111\}$ und eine Pyramide s, die in den beiden Zonen bp und km liegt. Man bestimme das Symbol von s aus dem

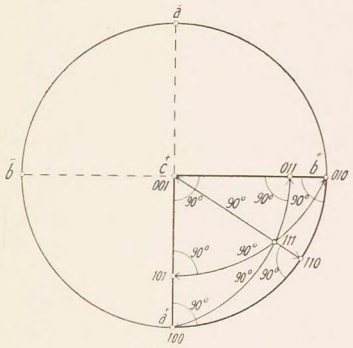


Fig. 36.

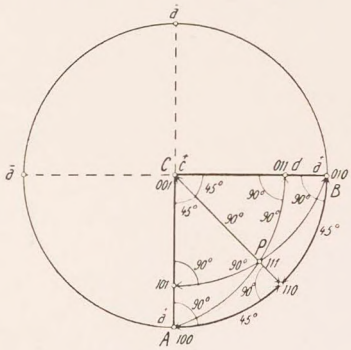


Fig. 37.

Zonenverband und die Koordinaten der Fläche von s vorn oben rechts, wenn gegeben ist

	φ	ϱ
b (010)	0^0	90^0
m (110)	$58^0\ 6'$	90^0
k (011)	0^0	$35^0\ 46\frac{1}{2}'$
p (111)	$58^0\ 6'$	$53^0\ 45'$.

Lösung: $\{121\}$, $\varphi = 38^0\ 46\frac{1}{2}'$, $\varrho = 61^0\ 35\frac{1}{2}'$.

§ 28. Tetragonales System. Die Einheitsfläche liegt auf der Halbierungslinie des Winkels bei C. Der Winkel ε wird daher 45^0 (Fig. 37).

$$\frac{a}{b} = \text{tg } 45^0 = 1,\ a = b. \quad \frac{c}{a} = \text{tg } CAP = \text{tg } Cd.$$

Das Achsenverhältnis ist gleich dem tg des Normalenwinkels, den die gerade Abstumpfung der Grundpyramide (d. h. die Deuteropyramide $\{011\}$) mit der Basis bildet.

Will man das Achsenverhältnis aus einer beliebigen Fläche ableiten, so kann man dieser Fläche nicht mehr ein willkürliches Symbol zulegen, sondern dieses muß immer einen solchen Wert haben, daß die Achsen a und b gleich werden. Umgekehrt findet man die Lage einer Fläche $(h\,k\,l)$ in genau derselben Weise wie beim monoklinen System (§ 26).

§ 29. Hexagonales System. Die Symmetrie des hexagonalen Systems leitet sich aus dem allgemeinen, symmetrielosen Fall ab, indem $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$ und $\gamma = 120^0$ wird, während außerdem die Grundpyramide $11(\bar{2})1$ irgendwo auf der Halbierungslinie des Winkels ACB (Fig. 38) liegt, wie im tetragonalen System. Schon in der Bemerkung zu § 24 wurde gesagt, daß man zur Anwendung der Zonenbeziehungen den Index k in $(h\,i\,k\,l)$ nicht berücksichtigt, weil immer $k = -(h + i)$. Die Beziehungen des hexagonalen Systems zu den anderen gestalten sich übersichtlicher, wenn man k vorderhand überhaupt fortläßt.

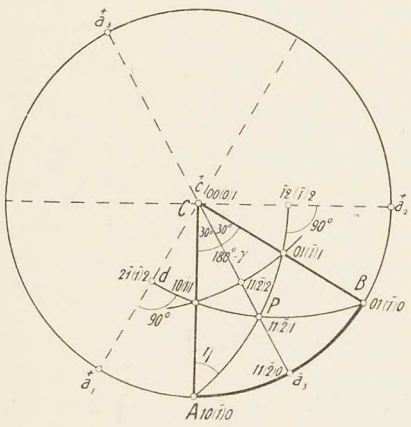


Fig. 38.

Die Durchstichpunkte der Achsen $\overset{+}{a}_1$ und $\overset{+}{a}_2$ findet man in der üblichen Weise. Um die sechszählige Drehungssymmetrie der c-Achse zum Ausdruck zu bringen, wählt man noch eine dritte horizontale Achse a_3, deren Durchstichpunkte in Fig. 38 angegeben sind.

Zur Bestimmung des Achsenverhältnisses $c : a$ führen wiederum die beiden Methoden des § 21 zum selben Resultat:

$$\frac{c}{a} = \frac{\cos \overset{+}{a}_1 P}{\cos \overset{+}{c} P} = \text{tg } dC = \text{tg } (2\bar{1}\bar{1}2) : (0001)$$

oder infolge der Symmetrie $c : a = \text{tg } (11\bar{2}\bar{2}) : (0001)$.

Das Achsenverhältnis ist gleich dem tg des Normalenwinkels, den die gerade Abstumpfung der einfachsten Pyramide erster Art

$\{10\bar{1}1\}$ (d. h. die Pyramide zweiter Art $\{11\bar{2}2\}$) mit der Basis bildet. Nach der zweiten Methode des § 21 finden wir:

$$c : a = \text{tg } \eta,$$

also genau dasselbe.

Die Übereinstimmung und andererseits der Unterschied mit den Verhältnissen im tetragonalen System (wo tg (011):(001) das Achsenverhältnis angibt) zeigt sich deutlich beim Vergleich der Definitionen im § 28 und in diesem Paragraph.

Die Symbolbestimmung einer Fläche von bekannter Lage und die Umkehrung der Aufgabe brauchen wohl keine nähere Erläuterung.

§ 30. Trigonales System. Das trigonale System (Vertikalachse eine dreizählige Symmetrieachse), dessen Hauptvertreter das Rhomboeder ist, kann als eine Hemiedrie des hexagonalen Systems (Vertikalachse eine sechszählige Symmetrieachse) betrachtet werden. Die unverkennbaren Beziehungen des hexagonalen und trigonalen Systems rechtfertigen diese Auffassung. Die Berechnungen entsprechen dann dem § 29.

Andererseits geht ein Rhomboeder, dessen Polkantenwinkel sich 90^0 nähern, stetig in einen Würfel über und wird also die Millersche Aufstellung trigonaler Kristalle mit den drei Polkanten des Grundrhomboeders als Kristallachsen in vielen Fällen den natürlichen Verhältnissen am besten gerecht werden. Diese Aufstellung, deren Haupteigenschaften nachfolgend kurz entwickelt sind, schließt sich dem allgemeinen, symmetrielosen Typus sehr einfach an, indem

$$\alpha = \beta = \gamma \text{ und } a = b = c.$$

Die drei Rhomboederflächen werden in Millerscher Aufstellung Endflächen mit den Symbolen (100), (010) und (001), die Einheitsfläche (111) ist gleich der Basis (0001) bei hexagonaler Auffassung.

Wir können jetzt die Aufstellung noch nach zweierlei Art vornehmen.

Erstens kann man (111) in das Zentrum der Projektion bringen, wodurch die dreizählige Symmetrie sofort ersichtlich ist (Fig. 41). Es ist jedoch mehr in Übereinstimmung mit der Aufstellung der übrigen Systeme, namentlich auch des regulären,

wenn man den Durchstichpunkt einer Achse in das Zentrum der Projektion legt (Fig. 39 und 40). Die Figuren 39 und 41 stimmen in der Größe von α genau überein.

Von den Achsenelementen ist nur α zu bestimmen, wie in

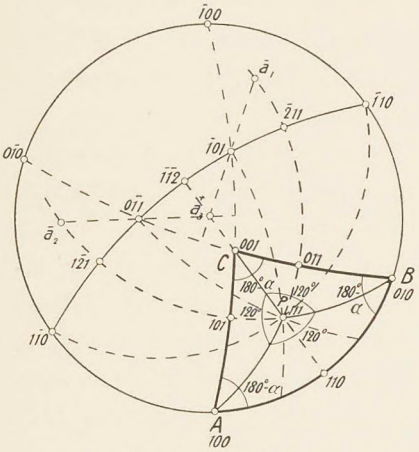


Fig. 39 ($\alpha > 90°$).

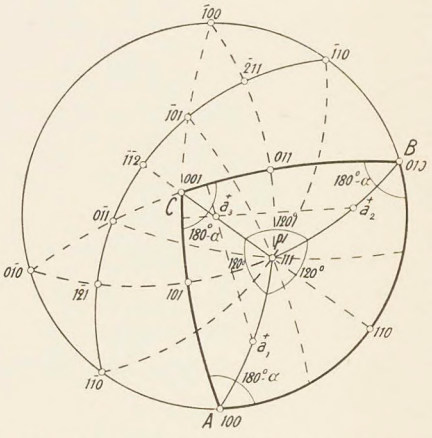


Fig. 40 ($\alpha < 90°$; PC immer $< 90°$).

Fig. 39—41 angegeben. Will man das Symbol einer beliebigen Fläche graphisch ableiten, so kann man hier wiederum die Sekans- oder die Sinusbeziehung anwenden. Das Verhältnis der Sekanslinien § 21, 1 oder der Sinuslinien § 21, 2 gibt unmittelbar das Weißsche Symbol der Fläche.

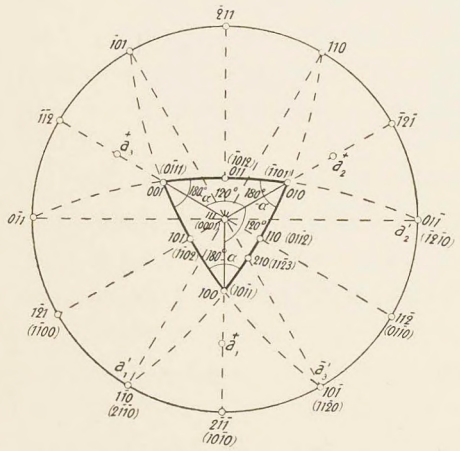


Fig. 41 ($\alpha > 90°$).

Um umgekehrt die Lage einer Fläche von bekanntem Symbol zu konstruieren, müssen wir (abgesehen von der Ermittelung aus dem Zonenverband) die Methode der Fig. 29 (S. 25) anwenden, die sich übrigens dadurch vereinfacht, daß nicht α und γ, sondern nur α in Betracht kommt und $a = b = c$ ist.

In Fig. 39—41 sind die Hauptformen der rhomboedrisch-hemiedrischen (bezw. ditrigonal-skalenoedrischen) Klasse, welche die wichtigste des trigonalen Systems ist, angegeben. Man sieht sofort, daß Fig. 41 aus Fig. 39 hervorgeht, wenn die Zone der Prismen, dessen Pol (111) ist, in die Projektionsebene gebracht wird (§ 20).

Aufgabe. Man vergleiche die Lage der übereinstimmenden Punkte in Fig. 41 und 39 entsprechend § 20.

Für eine ausführliche Beschreibung des trigonalen Systems siehe Groth, Physikalische Kristallographie 1905, 441 — 485 und 587 — 594. Für die ditrigonal-skalenoedrische Klasse ist das Wichtigste nachfolgend kurz zusammengefaßt, als Beispiel für die Verwendung der stereographischen Projektion im Spezialfalle und auch weil die sehr zweckmäßige Millersche Aufstellung des trigonalen Systems noch weniger allgemein üblich ist.

a_1, a_2, a_3 Achsenpole; a_1 Pol zur Zone (001):(010) usw.

Basis {111}.

Positives Grundrhomboeder (100), (010) und (001). Zwei Gegenflächen sind in Fig. 39 und 40 ebenfalls sichtbar.

Positive Rhomboeder. Jedesmal in der Zone des Grundrhomboeders und der Basis, an derselben Seite von (111) wie das Grundrhomboeder. Zwei Indizes sind immer gleich.

Negative Rhomboeder. In denselben Zonen wie die positiven Rhomboeder, jedoch jetzt an der anderen Seite von (111). Zwei Indizes sind immer gleich. Das negative Rhomboeder (011), (110), (101) stumpft die Polkanten des Grundrhomboeders gerade ab.

Hexagonales Prisma erster Art. Wie die Rhomboederflächen, jedoch gleichzeitig senkrecht zur Basis, also in der Zone, deren Pol P (111). Für alle Punkte dieser Zone gilt die Beziehung $h+k+l=0$, weil das Zonensymbol $[u\,v\,w]=[111]$ (vgl. die geometrische Bedeutung von u, v und w; Groth, Phys. Krist. 1905, 308). Die Flächen des hexagonalen Prismas erster Art haben daher die Symbole $(2\bar{1}\bar{1})$, $(11\bar{2})$ usw. Sie stumpfen die seitlichen Ecken der positiven Rhomboeder ab.

Hexagonales Prisma zweiter Art. Um 30° gegen dasjenige erster Art gewendet, mithin in der Zone je zweier Grundrhomboederflächen. Es stumpft die Mittelkanten des Grundrhomboeders (also die Kanten zwischen (100) und (00$\bar{1}$), (100) und (0$\bar{1}$0), (010) und ($\bar{1}$00) usw.) gerade ab. Symbole daher (10$\bar{1}$), (1$\bar{1}$0) usw.

Skalenoeder. Eine Fläche ($h\,k\,l$) innerhalb des etwa von (2$\bar{1}\bar{1}$), (111) und (11$\bar{2}$) angegebenen Sextanten (Fig. 41) kehrt infolge der Symmetrie sechsmal auf der oberen Hemisphäre wieder, gehört also einem Skalenoeder an. Ein Pol innerhalb des Dodekanten (2$\bar{1}\bar{1}$), (111), (10$\bar{1}$) hat die stumpfere Kante vorn, nähert sich also dem positiven Rhomboeder und wird daher als positiv bezeichnet.

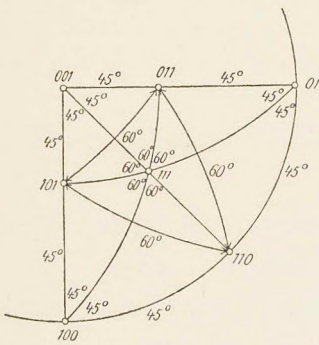


Fig. 42.

Innerhalb des Dodekanten (10$\bar{1}$), (111), (11$\bar{2}$) liegt entsprechend eine Fläche des negativen Skalenoeders. Den Übergang der beiden Skalenoeder, in der Zone von der Basis zum Prisma zweiter Art, bilden die hexagonalen Bipyramiden zweiter Art, deren einfachste {210} darstellt. Wie diese letztere stumpfen auch die Skalenoeder, deren einer Pol zwischen (100) und (010) in der Grundrhomboederzone liegt, die Polkanten des Grundrhomboeders ab, während Skalenoeder, deren einer Flächenpol zwischen (100) und (1$\bar{1}$0) bezw. (010) und ($\bar{1}$10) in derselben Zone liegt, die Mittelkanten des Grundrhomboeders abstumpfen.

Dihexagonales Prisma. Ist im Symbol $\{h\,k\,l\}$ des Skalenoeders die Summe $h+k+l=0$, so liegen die Flächenpole auf dem Grundkreis und gehören sie dem dihexagonalen Prisma an.

Die Überführung der Millerschen in Bravaissche Symbole läßt sich mit Hilfe von Fig. 41 graphisch ausführen, entsprechend § 22. Die Durchstichpunkte der Bravaisschen Achsen sind in Fig. 41 als a'_1, a'_2 und a'_3 angegeben. Bequemer ist es jedoch die Transformationsgleichungen zu verwenden, die hier nicht allgemein besprochen werden sollen, aber für den vorliegenden Fall sehr ein-

fach werden. Sei das Bravaissche Symbol $\{h\,i\,k\,l\}$, das Millersche $\{p\,q\,r\}$, so ist:

$$h = p - q$$
$$i = q - r$$
$$k = r - p$$
$$l = p + q + r;$$

bezw.

$$p = h - k + l$$
$$q = i - h + l$$
$$r = k - i + l.$$

Für die oben besprochenen Formen sind in Fig. 41 die Bravaisschen Zeichen in Klammern zugefügt.

§ 31. Reguläres System. Eine Übersicht über die Symmetrieverhältnisse im regulären System gibt die Fig. 42, die einer weiteren Erläuterung wohl nicht bedarf.

Die genaue Kristallberechnung mit Hilfe der stereographischen Projektion.

§ 32. Zur genauen Berechnung eines gemessenen Kristalls entwerfen wir erst nach § 25 u. f. die stereographische Projektion. Dies läßt sich sehr einfach ausführen, wenn der Kristall mit dem Theodolithgoniometer gemessen ist, die Flächen also einzeln durch φ und ϱ angegeben sind, bietet aber auch keine Schwierigkeiten, falls die Messung nach der älteren Methode mit dem einkreisigen Goniometer geschah und daher Normalenwinkel der Flächen jedesmal zu zweien bekannt sind.[1]

1) Man hat gegen die Flächenbezeichnung mit φ und ϱ angeführt, daß Kristallflächen nicht einzeln, wie Sterne am Himmel, betrachtet werden dürfen, weil sie im Zonenverband und in Symmetrieverhältnissen stehen. Sobald aber die gemessenen Koordinaten eingetragen werden, tritt der Zonenverband hervor und die ganze Kristallberechnung, sei es graphisch oder mittels Formeln (vgl. unten), beruht nur auf dem Prinzip der Zonen. Besonders bei der Benutzung des einkreisigen Goniometers treten die Zonen schon während der Messung unmittelbar heraus, aber auch oft muß der vollständige Zonenverband aus der Zeichnung bezw. Berechnung ergänzt werden. Ist einmal die Projektion der weiteren Rechnung zugrunde gelegt, so sind die beiden Methoden naturwissenschaftlich gleichwertig, das Rechnen mit φ und ϱ ist jedoch einfacher und übersichtlicher als mit beliebigen sphärischen Dreiecken.

Diese stereographische Projektion wird Fehler in der Berechnung mit Formeln, die namentlich durch Verwechslung von Richtung und Gegenrichtung leicht einreißen, verhüten.

Die Berechnung vereinfacht sich erheblich, wenn entweder A und B auf dem Grundkreise der Projektion liegen, c sich also im Zentrum befindet, oder eine Endfläche (etwa 001) das Zentrum der Projektion einnimmt. Im letzteren Falle liegen a und b auf dem Grundkreis. Wie dies durch passendes Justieren des Kristalls auf dem zweikreisigen Goniometer leicht geschieht, vgl. G. Wulff.[1]

1. Die Flächenpole sind durch φ und ϱ gegeben. Die verschiedenen Rechnungen lassen sich auf wenige Grundformeln reduzieren, wie es namentlich von G. Wulff[1] gezeigt wurde.

a) Die Entfernung zweier Flächenpole p_1 und p_2 (Fig. 43). Die Koordinaten von p_1 und p_2 sind resp. $\varphi_1\,\varrho_1$ und $\varphi_2\,\varrho_2$. $p_1\,p_2$ ergibt sich durch die Cosinusformel:

$$\cos p_1 p_2 = \cos \varrho_1 \cos \varrho_2 + \sin \varrho_1 \sin \varrho_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (1)$$

Für den Fall, daß nicht ϱ_1 oder $\varrho_2 = 90^0$ ist, macht man diese Formel bequemer für logarithmische Berechnung, indem man

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varrho_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$ einführt.

(ψ ist der kleinste positive Wert, welcher dieser Beziehung genügt.)

Dann ergibt sich:

$$\cos p_1 p_2 = \frac{\cos \varrho_1 \cos (\varrho_2 - \psi)}{\cos \psi}. \qquad (1\,a)$$

b) Die Koordinaten des Pols zum Zonenkreise $p_1\,p_2$. Wir beziehen die Längen φ' auf einen neuen Nullmeridian, der den Winkel $p_1 M p_2$ (Fig. 43) halbiert, also: $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ besitzt.

Daher:

$$\varphi'_1 = \varphi_1 - \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

$$\varphi'_2 = 2\pi - \varphi'_1 = 2\pi - \tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

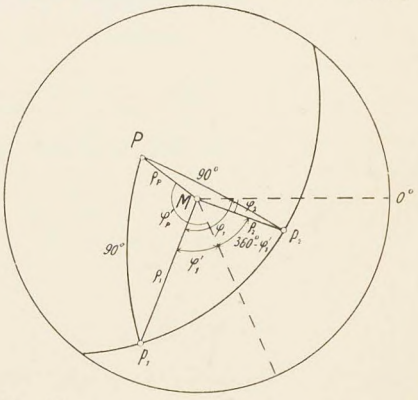


Fig. 43.

1) Zeitschr. f. Kristall. 1902, **36**, 29–39.

$$\cos P p_1 = 0 = \cos \varrho_P \cos \varrho_1 + \sin \varrho_P \sin \varrho_1 \cos (\varphi'_P - \varphi'_1).$$

$$\cos P p_2 = 0 = \cos \varrho_P \cos \varrho_2 + \sin \varrho_P \sin \varrho_2 \cos (\varphi'_2 - \varphi'_P)$$

oder aufgelöst nach φ'_P und ϱ_P

$$\operatorname{tg} \varphi'_P = \frac{\sin (\varrho_1 - \varrho_2)}{\sin (\varrho_1 + \varrho_2)} \cot \varphi'_2. \qquad (2)$$

$$\operatorname{cotg} \varrho_P = - \operatorname{tg} \varrho_1 \cos (\varphi'_P - \varphi'_1) = - \operatorname{tg} \varrho_2 \cos (\varphi'_P - \varphi'_2). \qquad (2\,a)$$

An Stelle von $(\varphi'_P - \varphi'_1)$ kann man selbstverständlich auch $\varphi_P - \varphi_1$ schreiben, und entsprechend ist $\varphi'_P - \varphi'_2 = \varphi_P - \varphi_2$.

Liegt einer der Punkte $p_1 p_2$, z. B. p_1, auf dem Grundkreise, wie es im Laufe der Berechnung und namentlich bei derjenigen der Achsenpole oft vorkommt, so ergibt sich unmittelbar $\varphi_P = \varphi_1 \pm 90^0$ und brauchen wir also die Formel (2) nicht anzuwenden. In diesem Falle, daß p_1 auf dem Grundkreise liegt, wird die eine Form der Gleichung (2 a) und zwar die mit ϱ_1, gleich $\sim \cdot 0$ d. h. unbestimmt und muß man somit die andere Form benutzen.

Mittels der Formeln (1) und (2) werden die Achsenwinkel α, β und γ aus den Koordinaten der Endflächen bezw. aus Flächenpolen in ihren Zonen berechnet.

c) Das Achsenverhältnis. Man berechnet das Achsenverhältnis $a : b : c$ aus einer Fläche $(h\,k\,l)$ (am einfachsten aus einer Grundpyramide (111) oder $(\bar{1}11)$ usw.) mittels der Sekans- resp. Cosinusbeziehung, wobei die nach (1) bestimmten Winkel zwischen den Achsenpolen und dem Pole $(h\,k\,l)$ mit $a\,O\,P$, $b\,O\,P$ und $c\,O\,P$ bezeichnet werden mögen.

$$a : b : c = \frac{h}{\cos a\,O\,P} : \frac{k}{\cos b\,O\,P} : \frac{l}{\cos c\,O\,P}. \qquad (3)$$

Umgekehrt finden wir $(h\,k\,l)$ einer gemessenen Fläche nach der Formel:

$$h : k : l = a \cos a\,O\,P : b \cos b\,O\,P : c \cos c\,O\,P. \qquad (3\,a)$$

Meistens werden wir das Symbol aus dem Zonenverband ermitteln und dann die Formel (3 a) nicht benutzen. Flächen mit hohen Indizes (z. B. Vizinalflächen) lassen sich jedoch aus dem Zonenverband gewöhnlich schwer ableiten; die Formel (3 a) ermöglicht es dann durch einfache Rechnungen das wahrscheinlichste Symbol der Fläche zu finden.

d) Berechnung der Koordinaten von Flächenpolen mit bekanntem Symbol. Liegt eine Fläche mit Pol Q in zwei bekannten Zonen mit den Polen P_1 und P_2, so ist Q von P_1 und P_2 um 90^0 entfernt. Q ist daher Pol des Zonenkreises $P_1 P_2$. Durch schrittweises Anwenden der Formeln (2) und (2 a) können wir daher die Fläche Q und ebenso jede andere Fläche im Zonenverband berechnen. Die Formeln (2) und (2 a) sind für Logarithmen brauchbar und gestatten somit ein bequemes und gleichförmiges Rechnen, das außerdem bei jedem Schritt durch die stereographische Projektion kontrolliert wird, so daß eventuelle Rechenfehler sofort aufgedeckt werden.

Die Vereinfachungen der Formeln durch ausgezeichnete Werte (90, 60, 45, 30^0) von ϱ oder φ ergeben sich ohne weiteres. Die Lage der Pole, welche hierfür in Betracht kommen, wurde in §§ 26 — 31 besprochen.[1]

2. Sind die Kristallflächen nicht einzeln durch φ und ϱ, sondern durch Normalenwinkel untereinander bekannt, so ist auch in diesem Fall die Kristallberechnung eine Auflösung sphärischer Dreiecke, die sich aus der stereographischen Projektion ergeben. Die Rechnung mit φ und ϱ ist erheblich einheitlicher und übersichtlicher.

§ 33. Berechnung von Albit als Beispiel. Wir wollen als Beispiel der obigen Methode den Albitkristall der Aufgabe S. 31 berechnen.[2]

In Fig. 44 ist die stereographische Projektion angegeben.

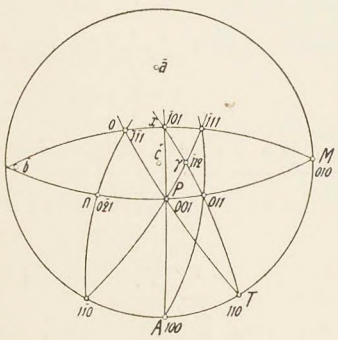


Fig. 44.

Gemessen:	φ	ϱ
P (001)	$81^0\ 51\frac{1}{2}'$	$27^0\ 1'$
M (010)	0^0	90^0
T (110)	$60^0\ 30\frac{1}{2}'$	90^0
x ($\bar{1}01$)	$279^0\ 6'$	$25^0\ 48'$

1) Will man die Koordinaten einer Fläche mit bekannten Indizes unmittelbar, d. h. ohne den Zonenverband, berechnen, z. B. weil das Symbol für Ableitung aus dem Zonenverband zu verwickelt ist, so wendet man am besten die Konstruktion des § 23 rechnerisch an. Man ermittelt also ε und η der betreffenden

Der Achsendurchstichpunkt $\bar{a}$ ist der Pol zur Zone PM, also $\varphi_{\bar{a}} = 270^0$.

$$\cot \varrho_{\bar{a}} = -\operatorname{tg} 27^0\,1' \cos(270^0 - 81^0\,51\tfrac{1}{2}'). \quad \varrho_{\bar{a}} = 63^0\,13'.$$

$\varrho_{\bar{a}}$ gibt uns unmittelbar $180^0 - \beta$, weil $\overset{+}{c}$ im Zentrum liegt, also

$$\underline{\beta = 116^0\,47'.}$$

Den Achsenpol $\bar{b}$ finden wir als Pol zur Zone Px. Hilfsnullmeridian wird $\varphi = \frac{1}{2}(279^0\,6' + 81^0\,51\tfrac{1}{2}') = 180^0\,28\tfrac{1}{2}'$;
daher $\varphi'_x = 98^0\,37\tfrac{1}{2}'$ und $\varphi'_P = 2\pi - 98^0\,37\tfrac{1}{2}'$.

Für die Koordinaten von $\bar{b}$, $\varphi'_{\bar{b}}$ und $\varrho_{\bar{b}}$, finden wir daher

$$\operatorname{tg} \varphi'_{\bar{b}} = \frac{\sin(27^0\,1' - 25^0\,48')}{\sin(27^0\,1' + 25^0\,48')} \cot 98^0\,37\tfrac{1}{2}', \text{ also } \varphi'_{\bar{b}} = -0^0\,14'$$

und $\cot \varrho_{\bar{b}} = -\operatorname{tg} 25^0\,48' \cos(-0^0\,14' - 98^0\,37\tfrac{1}{2}')$, also $\varrho_{\bar{b}} = 85^0\,44\tfrac{1}{2}'$.

Folglich $$\underline{\alpha = 94^0\,15\tfrac{1}{2}'.}$$

Den Achsenwinkel γ bestimmen wir als Abstand $\bar{a}\,\bar{b}$ nach der Formel (1 a) S. 42.

	φ	ϱ
$\bar{a}$	270^0	$63^0\,13'$
$\bar{b}$	$180^0\,14\frac{1}{2}'$	$85^0\,44\frac{1}{2}'$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} 63^0\,13' \cos(270^0 - 180^0\,14\tfrac{1}{2}'), \text{ also } \psi = 0^0\,29'$$

$$\cos \bar{a}\,\bar{b} = \frac{\cos 63^0\,13' \cos(85^0\,44\frac{1}{2}' - 0^0\,29')}{\cos 0^0\,29'}$$

$$\underline{\bar{a}\,\bar{b} = \gamma = 87^0\,52'.}$$

Das Achsenverhältnis $a:b$ berechnen wir aus den Abständen $T\bar{a}$ und $T\bar{b}$, die ihrerseits mit der Formel (1) gefunden werden.

$$a:b = \frac{1}{\cos(180^0 - T\bar{a})} : \frac{1}{\cos(180^0 - T\bar{b})}$$

$$\cos T\bar{a} = \sin 63^0\,13' \cos(270^0 - 60^0\,30\tfrac{1}{2}')$$

$$\cos T\bar{b} = \sin 85^0\,44\tfrac{1}{2}' \cos(180^0\,14\tfrac{1}{2}' - 60^0\,30\tfrac{1}{2}')$$

daher $$\underline{a:b = 0{,}6365:1.}$$

Das Verhältnis $a:c$ finden wir mit Hilfe von $x\,(\bar{1}01)$; der Abstand $x\overset{+}{c}$ ist schon bekannt als ϱ_x.

Fläche und weiterhin φ und ϱ mittels sphärischer Dreiecke, die sich aus der stereographischen Projektion leicht ergeben.

2) Ein anderes Beispiel, Kalziumthiosulfat, findet sich in der zitierten Abhandlung von G. Wulff.

	φ	ϱ
$\bar{a}$	270^0	$63^0\ 13'$
x	$279^0\ 6'$	$25^0\ 48'$.

Wieder unter Verwendung der Formeln (1) bezw. (1 a) und (3), wobei wir für a 0,6365 annehmen, finden wir

$$c = 0{,}5581.$$

Es ist also gefunden

$$a : b : c = 0{,}6365 : 1 : 0{,}5581.$$

Zur Kontrolle berechnen wir noch die Koordinaten der Flächen o $(\bar{1}\bar{1}1)$ und γ $(\bar{1}12)$.

1. o $(\bar{1}\bar{1}1)$ ist der Schnittpunkt der Zonen TP und xM. Der Pol der Zone TP hat die Koordinaten $\varphi = 330^0\ 30'$, $\varrho = 79^0\ 29'$ (φ unmittelbar gegeben als $\varphi_T - 90^0$, ϱ mit Formel (2 a) berechnet).

Der Pol der Zone xM hat die Koordinaten $\varphi = 90^0$, $\varrho = 64^0\ 29'$. Der gesuchte Pol o ist der Pol zu der von diesen beiden Punkten gebildeten Zone; durch Anwendung der Formeln (2) und (2 a) mit dem Hilfsnullmeridian $\varphi = 210^0\ 15'$ finden wir die Koordinaten

$$\varphi_o = 224^0\ 38\tfrac{1}{2}',\quad \varrho_o = 34^0\ 11'.$$

2. Die Lage von γ $(\bar{1}12)$ konstruieren wir am einfachsten als Schnittpunkt der Zonen Tx und einer Zone $P:(\bar{1}11)$.

Die Zone Tx und die schon bekannte Zone PM liefert uns (011). Eine Zone $A:(011)$ und die bekannte Zone xM hat als Schnittpunkt $(\bar{1}11)$. Die noch unbekannte Lage von A (100) ergibt sich als $\varphi_A = \varphi_{\bar{b}} - 90^0 = 90^0\ 14\tfrac{1}{2}'$, $\varrho_A = 90^0$.

In dieser Weise finden wir:

	φ	ϱ
Pol der Zone Tx	$150^0\ 30\tfrac{1}{2}'$	$73^0\ 13'$
also (011)	$38^0\ 36\tfrac{1}{2}'$	$38^0\ 58'$
Pol der Zone $A:(011)$	$180^0\ 14\tfrac{1}{2}'$	$57^0\ 37'$
also $(\bar{1}11)$	$323^0\ 7'$	$38^0\ 29\tfrac{1}{2}'$
Pol der Zone $P:(\bar{1}11)$	$209^0\ 51\tfrac{1}{2}'$	$72^0\ 34'$.

Daher $\varphi_\gamma = 2^0\ 13'$ $\varrho_\gamma = 19^0\ 31'$.

Aufgabe. Im Anschluß an das Vorhergehende berechne man die Koordinaten der Fläche n $(0\bar{2}1)$ (vgl. Fig. 44).

Lösung: $\varphi_n = 154^0\ 16'$, $\varrho_n = 49^0\ 18'$.

Anwendung der stereographischen Projektion bei homogenen Deformationen.

§ 34. Ist die Änderung von Kristallwinkeln infolge homogener Deformation, z. B. durch Temperaturänderung, bestimmt, so ist es oft erwünscht, die Änderung anderer, gesetzlich mit den ersten verknüpfter Winkel zu beurteilen. In vielen Fällen bietet die stereographische Projektion ein bequemes Mittel hierzu. Um ein einfaches Beispiel zu nennen, betrachten wir die Änderung von α beim Quarz infolge von Erhitzung, wenn wir gemessen haben, daß der Normalenwinkel (100):(010) dadurch abnimmt. In Fig. 45 sind die Verhältnisse übertrieben dargestellt, (111) ist als Projektionszentrum gewählt. Bei der Erhitzung rücken die Zonenkreise immer näher an das Zentrum und werden dadurch flacher, 180^0-α nimmt ab und strebt dem Grenzwerte 60^0 zu, der erreicht wird, wenn die Zonenkreise mit dem Zentrum zusammenfallen. Der Achsenwinkel α nimmt also zu und würde im Grenzwerte 120^0 betragen.

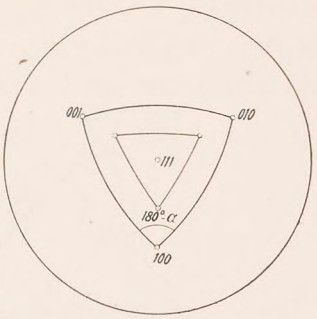


Fig. 45.

Kristallzeichnen mit Hilfe der stereographischen Projektion.

§ 35. Ausgehend von der stereographischen Projektion kann man sehr einfach eine Parallelprojektion eines Kristalls — d. h. eine Projektion (oder „Perspektive") aus einem unendlich weit entfernten Augenpunkt — auf eine beliebige Fläche darstellen. Die Methode wurde von F. Stöber[1] angegeben, von C. Viola[2] etwas vereinfacht und von S. Penfield[3] ausführlich beschrieben. Besonders mit Hilfe des Wulffschen Netzes ist die Ausführung bequem und übersichtlich.

---

1) Bull. soc. fr. de min. 1899, **22**, 42—60. Ref. Z. f. Krist. 1901, **34**, 621—627.
2) Grundzüge der Kristallographie 1904, 29.
3) Z. f. Krist. 1907, **43**, 1—11 (Übersetzung von K. Stöckl).

1. Parallelprojektion auf die Ebene der stereographischen Projektion. Nach dem Vorhergehenden projiziert sich eine Zonenachse, d. h. die gemeinsame Kantenrichtung einer Zone, von dem Südpol S der Kugel aus als gerade Linie durch M senkrecht zur Sehne des Zonenkreises. Auch wenn der Augenpunkt unendlich weit von M entfernt auf der Verlängerung von MS liegt, ist die Projektion der Kantenrichtung dieselbe, sie ist also als eine parallele Projektion aufzufassen. Entsprechend können wir die Richtungen aller am Kristall vorkommenden Kanten folgendermaßen

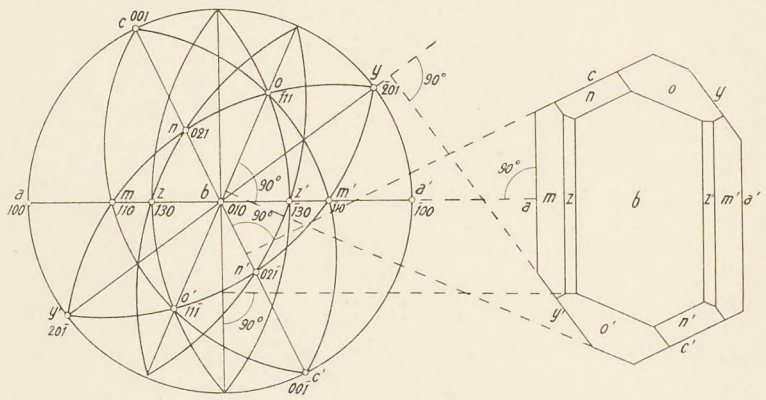


Fig. 46.

konstruieren, also den Kristall naturgetreu projizieren: auf den Sehnen der Zonenkreise in der stereographischen Projektion werden Lote errichtet und die durch die Lote angegebenen Kantenrichtungen werden entsprechend der Ausbildung des Kristalls zusammengefügt. So ist in Fig. 46 ein Orthoklaskristall mit $b\{010\}$, $c\{001\}$, $a\{100\}$, $m\{110\}$, $z\{130\}$, $y\{\bar{2}01\}$, $n\{021\}$ und $o\{\bar{1}11\}$ auf $b(010)$ parallel projiziert.

Infolge der zweizähligen Drehachse senkrecht zur Projektionsebene treten jedesmal zwei Zonenkreise auf derselben Sehne auf. Von den zugehörigen Kantenrichtungen werden daher auch jedesmal zwei in der Parallelperspektive gleich, obwohl sie in Wirklichkeit schief zueinander liegen (vgl. weiter unten S. 52).

Ergänzt man die Gegenflächen des Kristalls in der Parallelprojektion (wenn nämlich die Zeichenebene nicht eine Symmetrieebene des Kristalls ist wie in Fig. 46), so gewinnt das Bild oft

sehr an Anschaulichkeit (vgl. Fig. 48). Winkeltreu ist die Parallelperspektive nur für in der Projektionsebene liegende Kanten.

2. Parallelprojektion auf eine beliebige Ebene, deren Pol gegeben. Wollen wir die Parallelprojektion auf eine andere Ebene als diejenige der stereographischen Projektion entwerfen, so vertauschen wird einfach die Projektionsebenen nach § 20 und verfahren genau so wie unter 1.

Es ist jedoch nicht nötig die neue stereographische Projektion für sich zu zeichnen, obgleich es sich bei verwickelten Kristallen, zur Vermeidung vieler Konstruktionslinien und zur besseren Übersicht, wohl empfehlen dürfte. Wir können wie nachfolgend verfahren (Fig. 47): sei P der Pol der Projektionsebene SS und sei die Kante von a und b in Parallelperspektive auf SS gesucht. Wir ziehen den Zonenkreis ab, der SS in p schneidet. Nach dem Umtauschen der Projektionsebenen fällt p in p' auf der Verlängerung von Pp (§ 20). Der Punkt p' gehört also dem neuen Zonenkreis ab an, dessen Sehne durch $p'M$ geht. Die gesuchte Kantenrichtung ist somit als Lot auf $p'M$ gegeben. In dieser Weise ist in Fig. 48 ein Hornblendekristall mit $b\{010\}$, $m\{110\}$ und $d\{011\}$ auf (011) parallel projiziert.

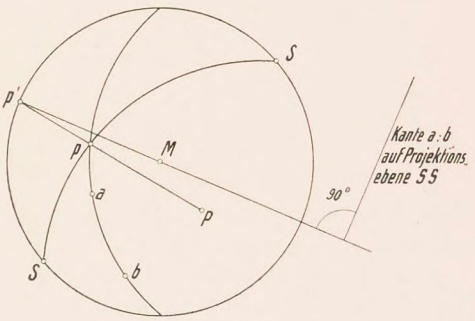


Fig. 47.

Praktische Regeln für die Wahl der Ebene SS sind nach Stöber (l. c.):

1. Man wähle den Kreis SS wenn möglich nicht so, daß er durch einen (wichtigen) Flächenpol oder nahe an demselben vorbeigeht. Sonst würde die betreffende Fläche als Gerade oder doch sehr verkürzt erscheinen.

2. Geht SS durch den Schnittpunkt zweier Zonen oder in dessen Nähe, so werden die Achsen dieser Zonen in der Zeichnung parallel oder nahezu parallel laufen, was oft lieber zu vermeiden ist (vgl. das zu Fig. 50 Gesagte).

Aufgaben. 1. Man zeichne ein „Kopfbild“ (Parallelperspektive auf einer Ebene senkrecht zur Prismenzone) des S. 31 und 44 berechneten Albit unter Zufügung der Form $l\{1\bar{1}0\}$ mit $\varphi = 119^0\ 52'$ (wenn möglich zunächst mit Hilfe eines Modells, oder wenigstens nach der Anfertigung

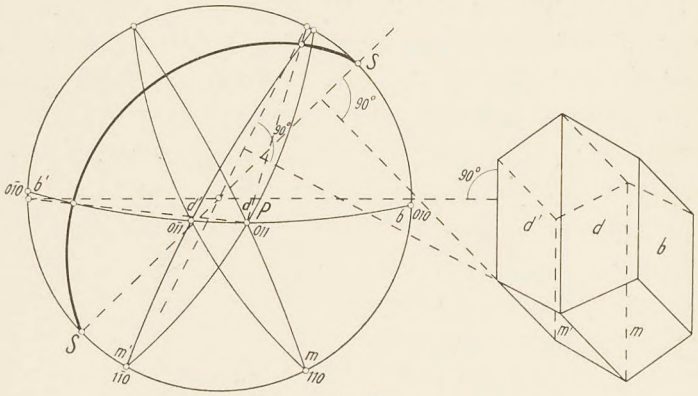


Fig. 48.

einer Handskizze, um das Zusammenschließen der Flächen besser übersehen zu können).

2. Einen Rhombendodekaeder auf (102) parallel zu projizieren. (Dreht man die Zeichnung um ca. 45°, so sieht sie aus wie die Kombination von Rhomboeder und sechseitigem Prisma zweiter Art, vgl. § 30.)

Stereographische Projektion und Zeichnung von Kristallzwillingen.

§ 36. Kristallzwillinge werden genau in derselben Weise projiziert und gezeichnet wie einfache Kristalle. Besitzen die Zwillinge eine Zwillingsebene als Symmetrieebene, so findet man den Pol dieser Ebene, indem man entsprechende Pole der beiden Teilkristalle durch Zonenkreise verbindet; diese Zonenkreise schneiden sich im Pole der Zwillingsebene (Fig. 49), wie es aus einer räumlichen Darstellung auf der Kugel gleich ersichtlich ist.

Setzen wir umgekehrt voraus, daß die Zwillingsebene mit Pol P und der einfache Kristall in stereographischer Projektion gegeben ist. Wir finden dann die Pole der Zwillingsstellung, z. B. m_1 zu m und n_1 zu n in Fig. 49, indem wir auf dem Zonenkreise durch m und P entweder einen Abstand mP nach der einen oder 180^0-mP

nach der anderen Seite abtragen, wie es die Möglichkeit der Projektion mit sich bringt. Oft empfiehlt es sich, die Zwillingsebene als Großkreis mit einzutragen (ZZ in Fig. 49). Man sieht gleich ein, daß n und n_1, m und der Gegenpol von m_1 usw. symmetrisch zu ZZ liegen.

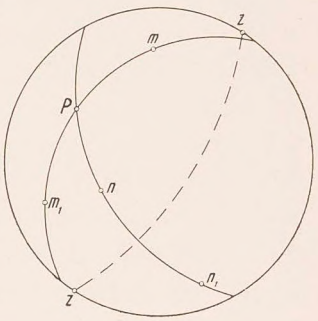


Fig. 49.

Mit einiger Übung ist es leicht, die Zeichenebene für die Parallelperspektive eines Zwillingskristalls so zu wählen, daß das Bild die gewünschte Anschauung bietet.

In Fig. 50 ist ein Durchdringungszwilling eines Würfels nach einer Oktaederfläche (Flußspat) aus der stereographischen Projektion gezeichnet. Als Zwillingsebene wurde (111), als Zeichenebene (211) gewählt. Der Pol dieser Ebene wurde in das Zentrum der stereographischen Projektion gebracht, wie in

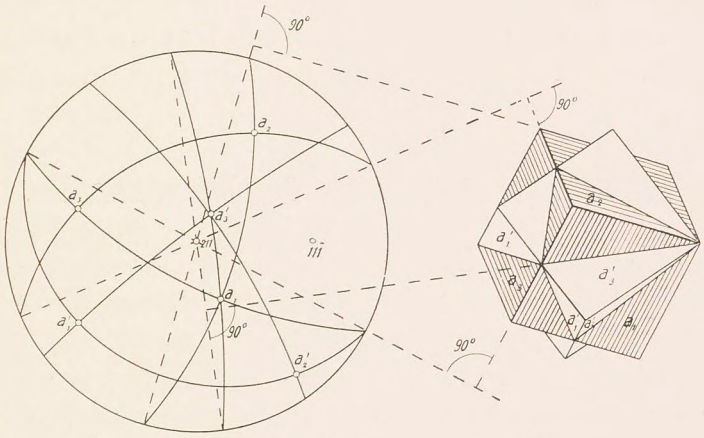


Fig. 50.

Fig. 50 ersichtlich. Obgleich die sehr einfachen Teilkristalle nur je drei Kantenrichtungen aufweisen, besitzt der Zwilling fünfzehn verschieden gerichtete Kanten. Man braucht diese fünfzehn (mit den zugehörigen Zonenkreisen) jedoch nicht alle zu konstruieren, weil man bei ebenmäßiger Ausbildung des Zwillings die Halbierung

der Würfelkanten durch die Zwillingsebene benutzen kann. In Fig. 50 sind die Konstruktionslinien für das Individuum $a_1 a_2 a_3$ eingezeichnet, das zweite Individuum ist in derselben Weise konstruiert, außerdem noch eine Zwillingskante (zwischen a_1 und a'_3). Die übrigen Kanten lassen sich alle ohne Benutzung der stereographischen Projektion ergänzen.

In Fig. 50 wird gleichzeitig ein Beispiel bezüglich der zweiten Stöberschen Regel gegeben (S. 49). In der üblichen stereographischen Projektion auf (001) sieht man, daß der zum Pole (211) gehörige Zonenkreis durch den Schnittpunkt der Zonenkreise $a_1 a_3$ und $a'_1 a'_2$ geht. Entsprechend haben die letzteren Zonenkreise in Fig. 50, mit (211) im Zentrum, dieselbe Sehne und fallen die Kantenrichtungen $a_1 a_3$ und $a'_1 a'_2$ in der Perspektive parallel aus. Die linke Seite der Perspektive wird dadurch weniger deutlich und in vorkommenden Fällen wird man die Ebene der Perspektive anders wählen. Beim Orthoklaskristall Fig. 46 ist derselbe Umstand nicht störend. Aber allgemeine Schlüsse auf tautozonale Lage von Flächen können aus Parallelität von Kanten in der Parallelperspektive nur dann gezogen werden, wenn die zweite Stöbersche Regel überall befolgt ist.

Bemerkungen über andere Projektionsmethoden.

§ 37. Neben der stereographischen Projektion bestehen noch eine große Anzahl verschiedener Projektionsmethoden, von denen nur die gnomonische und die Linearprojektion eine mehr allgemeine Verwendung gefunden haben.

Die gnomonische Projektion entsteht aus den Schnittpunkten der vom Kristallzentrum aus gezogenen Flächennormalen mit einer Ebene. Daher werden Zonen durch gerade Linien dargestellt. Wie in der stereographischen Projektion werden also Flächen durch Punkte, Zonen durch Linien wiedergegeben. Nachteile der gnomonischen Projektion sind, daß sie keine winkelgetreue Projektion ist, daß Punkte, die um einen bestimmten Winkel von einem Pole entfernt sind, auf einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel liegen[1], nicht auf einem Kreise wie in der stereographischen Projektion, und daß eine Zone, gewöhnlich die Prismenzone,

1) Vgl. V. Goldschmidt, Über Projektion und graphische Kristallberechnung, 1887, 46.

in das Unendliche rückt. Der Vorteil, daß Zonen als gerade Linien auftreten ist durch die Erfindung des stereographischen Netzes und des Kreisbogenlineals unwesentlich geworden.

Bei der Linear-, in engerem Sinne Quenstedtschen Projektion, werden alle Flächen durch einen Punkt gelegt und die Schnittlinien mit einer nicht durch diesen Punkt gehenden Ebene bestimmt. In diesem Falle werden daher Flächen durch Linien, Zonen dagegen durch Punkte dargestellt. Besonders beim Kristallzeichnen, ausgehend von dem Achsenkreuz, findet die Linearprojektion Verwendung, auch läßt sie die Symbole der verschiedenen Flächen unmittelbar übersehen. In bezug auf vielseitige Anwendungsfähigkeit tritt die Linearprojektion gegen die stereographische sehr in den Hintergrund.

Anwendung der stereographischen Projektion auf optische Erscheinungen bei Kristallen.

§ 38. Allgemeines. Wie die geometrischen können auch viele optische Eigenschaften der Kristalle mittels der stereographischen Projektion übersichtlich dargestellt und rechnerisch oder durch einfache Konstruktionen graphisch ermittelt werden. Wir wollen im nachfolgenden nur einige Hauptsachen und ihre praktische Anwendung besprechen.

Besonders die optische Orientierung eines Kristalls tritt in der stereographischen Projektion deutlich hervor. Die Durchstichpunkte mit der Kugel für die optischen Achsen, die Mittellinien und die optische Normale zweiachsiger Kristalle werden genau so projiziert wie Durchstichpunkte von Kristallkanten. Dabei halbiert die Projektion der Mittellinien den Abstand zwischen den Projektionen der Achsenpole und bildet die optische Normale den Pol zur Ebene der optischen Achsen. Auch können die Dispersionen der optischen Achsen, der Mittellinien, der Achsenebene, weiterhin die Änderung der optischen Orientierung mit der Temperatur und in isomorphen Reihen eingetragen und unmittelbar übersehen werden.

Die optische Orientierung richtet sich in ihrer Symmetrie nach dem Kristallsystem. Im triklinen System haben die optischen Achsen eine beliebige, nicht durch Symmetrie beschränkte Lage; im monoklinen System ist die Achsenebene für eine beliebige

Farbe entweder parallel oder senkrecht zu (010); im letzteren Falle wird der optische Achsenwinkel von (010) halbiert; im rhombischen System muß die Symmetrie nach den drei geometrischen Achsenebenen gewährt sein. Diese Verhältnisse müssen in der stereographischen Projektion zum Ausdruck kommen, wie es nach dem Vorhergehenden ohne weiteres klar sein wird.

§ 39. Auslöschungsschiefe bei optisch einachsigen Kristallen. Die Auslöschungsrichtungen optisch einachsiger Kristalle liegen im Hauptschnitt und senkrecht dazu. Unter Hauptschnitt versteht man bekanntermaßen die Ebene durch die optische Achse und die Normale zu den sich fortpflanzenden Lichtwellen. Fällt das Licht auf eine Kristallplatte senkrecht ein, so geht der Hauptschnitt mithin durch die Plattennormale. Die Spur des Hauptschnittes auf der Projektionskugel bildet einen Großkreis durch den Durchstichpunkt der Achse c und den Pol P der Fläche, deren Auslöschung festgelegt werden soll (Fig. 51).

Wir wollen jetzt die Auslöschungsschiefe α zu der Kante von P mit einer Fläche Q bestimmen. Diese Kante selbst stereographisch zu projizieren, würde uns nicht helfen, weil nur für Kanten, die in der Projektionsebene liegen, die Winkeltreue der Projektion gilt (S. 49). Dagegen können wir den Winkel $90^0 - \alpha$ des Hauptschnittes mit einer auf der betreffenden Kante senkrecht stehenden Zonenkreisebene (Normalenebene) unverändert aus der stereographischen Projektion ablesen. Dieser von den Großkreisen cP und PQ gebildete Winkel ergänzt den gesuchten Auslöschungswinkel gegen die Kante PQ zu 90^0 (Fig. 52) und gibt also direkt den Winkel der zweiten Auslösungsrichtung mit der Kante an.

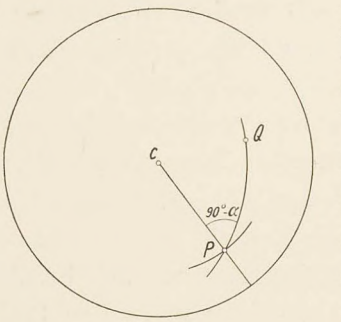


Fig. 51.

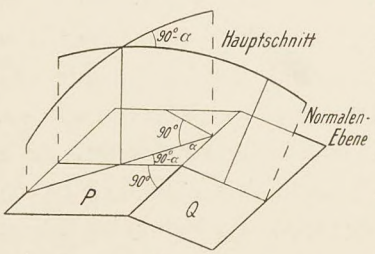


Fig. 52.

Der Winkel $90^0 - \alpha$ kann in Fig. 51 mit Hilfe des Wulffschen

Netzes nach § 11 abgelesen werden. — Schließlich sei noch in Erinnerung gebracht, daß bei optisch positiven Kristallen die Schwingungen in der Richtung cP die geringste Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen.

§ 40. Auslöschungsschiefe bei optisch zweiachsigen Kristallen. Während bei den optisch einachsigen Kristallen hauptsächlich gerade und symmetrische Auslöschungen in Betracht kommen, ist die Ermittelung der Auslöschungsschiefe bei zweiachsigen, und zwar bei monoklinen und triklinen Kristallen, von besonderer Wichtigkeit. Die Lage der Auslöschungsrichtungen in bezug auf die optischen Achsen wird durch eine sehr einfache, von Fresnel herrührende Konstruktion gefunden. Bringt man durch eine Flächennormale und die beiden optischen Achsen Ebenen an und halbiert den Winkel dieser Ebenen, so ist die Spur der Halbierungsebene auf der betreffenden Fläche eine Auslöschungsrichtung derselben. Die zweite Auslöschungsrichtung steht immer senkrecht zur ersten.

Der Beweis dieser Beziehung ergibt sich sehr anschaulich mit Hilfe der Indikatrix. Es sei auf Th. Liebisch, Grundriß der physikalischen Kristallographie 1896, S. 364 verwiesen.

Die Ausführung der Konstruktion geschieht nach § 11 (Fig. 53): Wir legen Großkreise durch PA und PB, tragen auf beiden von P aus 90° ab und finden so den Äquator pq zum Pole P. Der

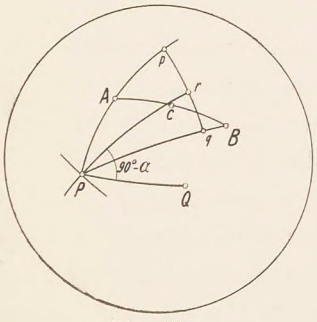


Fig. 53.

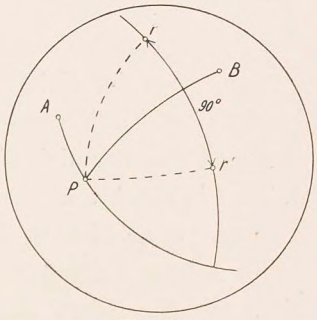


Fig. 54.

Bogen pq wird in r halbiert, Pr ist dann die Projektion der Halbierungsebene des Winkels APB. Manchmal ist die Lage von A, B und P so, daß man innerhalb des Grundkreises nur das Sup-

plement des Winkels APB halbieren kann (r' in Fig. 54). Man trägt dann von r' aus den Abstand $rr' = 90^0$ auf dem zum Pole P gehörigen Äquator ab und findet so wiederum r.

Nur wenn P gleich weit von A und B entfernt ist (oder wenn A, B und P auf demselben Zonenkreis liegen), geht Pr durch die Projektion der Mittellinie (C in Fig. 53).

Wie in § 39 werden wir wiederum die Auslöschungsschiefe gegen eine Kantennormale in der Kristallplatte, nicht gegen eine Kante selbst, aus der Projektion ermitteln (Fig. 53).

Schließlich ist es wichtig zu wissen, ob die Richtung Pr der Schwingungsrichtung der schnelleren oder der langsameren Lichtbewegung entspricht. Konventionell nehmen wir die Reihenfolge der Hauptbrechungsindizes $\gamma > \beta > \alpha$ und nennen die Brechungsindizes, die für die Lichtschwingungen in einer beliebigen Platte in Betracht kommen, γ_1 und α_1, wobei wieder $\gamma_1 > \alpha_1$. Fernerhin bezeichnen wir eine Schwingungsrichtung mit dem zu dieser Schwingung gehörenden Brechungsindex. Normal zu den Schwingungsrichtungen γ_1 und α_1 pflanzen sich Lichtbewegungen fort mit den relativen Geschwindigkeiten $\frac{1}{\gamma_1}$ und $\frac{1}{\alpha_1}$.

Kehren wir zu der Schwingung nach Pr in Fig. 53 zurück. Wir nehmen an, daß der Abstand AB kleiner als 90^0 ist, daß also die Halbierungsebene Pr den spitzen Achsenwinkel durchschneidet. Es gilt dann die Regel:

die Schwingungsrichtung $Pr = \gamma_1$, wenn die erste Mittellinie $(C) = \gamma$, wenn also der Kristall positiv doppelbrechend;

die Schwingungsrichtung $Pr = \alpha_1$, wenn die erste Mittellinie $= \alpha$, wenn also der Kristall negativ doppelbrechend.

(Vgl. Th. Liebisch l. c.)

Diese Regel ist in Übereinstimmung mit den Verhältnissen bei einachsigen Kristallen, die sich aus denen bei zweiachsigen ableiten lassen, indem A und B zusammenfallen. Pr entspricht dann dem Hauptschnitt.

§ 41. Beispiele.

1. Die Auslöschungsschiefe auf (001) und (010) beim Albit. Wir benutzen die Daten für Albit von Amelia Co. nach

F. Becke[1] und nehmen die Prismenzone als Grundkreis der Projektion mit M (010) in $\varphi = 0^0$ (Fig. 55). Die Lage der Zone (010):(001) ist gegeben durch den Winkel $\beta = 116^0\,29'$. In dieser Zone wird P(001) gefunden mittels des Winkels $M:P = 86^0\,24'$.

$\varphi_A = 217^0\,41'$ $\varrho_A = 73^0\,55'$
$\varphi_B = 138^0\,27'$ $\varrho_B = 82^0\,31'$
} berechnet aus der anders ausgeführten Ortsbestimmung bei Rosenbusch-Wülfing.

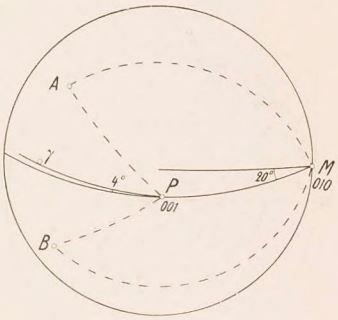


Fig. 55.

Konstruktiv gefunden: Auslöschungsschiefe auf P gegen die Spur des Zonenkreises PM (= normal zur Kante PM) 4^0 in Uhrzeigersinn von pm (Fig. 56) abgezählt; auf M 20^0 ebenfalls in Uhrzeigersinn.

Der Achsenwinkel $AB = 77^0\,39'$ und wird von der I. Mittellinie γ halbiert. Die konstruierten Halbierungsebenen geben daher die Richtung γ_1 an. Die Richtung α_1 auf P und M macht einen Winkel von 4 resp. 20^0 mit der Kante PM, beide Male positiv (in Uhrzeigersinn) von dieser Kante ab gezählt.

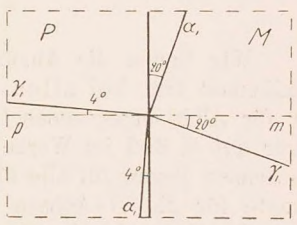


Fig. 56.

Diese graphischen Ableitungen stimmen mit den Messungen von Becke überein.

2. Die Auslöschungsschiefe in der Prismenzone des Diopsid. Wir projizieren auf (010) und bringen (100) in $\varphi = 180^0$ (Fig. 57), die c-Achse projiziert sich also in $\varphi = 270^0$ $\varrho = 90^0$. Für weißen Diopsid von Nordmarken ist nach Messungen von E. A. Wülfing[2] $c:\gamma = 39^0\,12'$ im stumpfen Winkel β, während die Achsenebene in (010) liegt. $2V = 58^0\,52'$. Diese Werte sind in Fig. 57 eingetragen. Die Auslöschungsschiefe auf (010) finden wir unmittelbar, wenn wir γ mit B verbinden. Für Flächen der Zone AB müssen wir jedesmal die Konstruktion des § 40 anwenden. In Fig. 57 ist

1) Vgl. Rosenbusch-Wülfing, Mikroskopische Physiographie I², 1905, S. 331 für P und M, S. 342 bezw. 340 für φ und ϱ der optischen Achsen, S. 343 für das Schlußergebnis.

2) Vgl. Rosenbusch-Wülfing I², 203.

diese für (110) mit $\varrho = 43^0\,35'$ und für eine beliebige Fläche mit $\varrho = 70^0$ ausgeführt. Man sieht, daß die Auslöschungsrichtung gegen die Normale zur Kante (100):(010) immer steiler wird, bis sie in (100) schließlich 90^0 erreicht. In dieser Art kann man die Auslöschungskurve graphisch feststellen. Auch für eine genaue Berechnung der Auslöschungskurve ergeben sich die erforderlichen sphärischen Dreiecke sehr leicht aus der stereographischen Projektion.

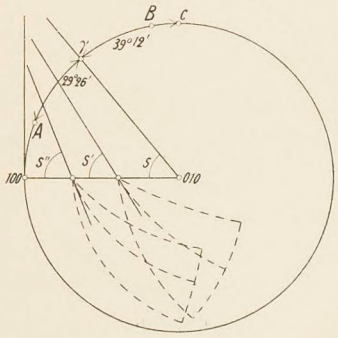


Fig. 57.

Aufgabe. Man ermittele graphisch die Auslöschungsschiefe gegen die Kantenrichtung PM für eine Fläche des Albit in der Zone von M und P, deren Pol um 24^0 nach links von P entfernt ist (Fig. 55).

Wir finden die Auslöschungsschiefe gleich ca. 0^0. Diese Eigentümlichkeit tritt bei allen Plagioklasen auf für Flächen in der Nähe der für Albit angegebenen.[1] Der Grund geht aus einer Betrachtung der Figur auf S. 339 im Werke von Rosenbusch-Wülfing I[2] hervor: die A-Achsen liegen für alle Plagioklase sehr nahe zusammen, während die Punkte für die B-Achsen ungefähr auf einem Großkreise liegen. Die Lage der Sammelstelle für A und des Großkreises für B ist außerdem so, daß die erwähnte merkwürdige Eigenschaft der Plagioklase als Folge auftritt.

1) Vgl. Michel-Lévy et Lacroix, Les Minéraux des Roches 1888, 37.

Verlag von Gebrüder Borntraeger in Berlin
W 35 Schöneberger Ufer 12a

Petrographisches Praktikum von **Prof. Dr. Reinhold Reinisch**, Privatdozent an der Universität Leipzig.

Erster Teil: **Gesteinbildende Mineralien.** Zweite Auflage. Mit 81 Textfiguren und 5 Tabellen. In Leinenband 4 Mk. 60 Pf.

Zweiter Teil: **Gesteine.** Vergriffen. — Neue Auflage in Vorbereitung.

Die kristallinen Schiefer. Eine Darstellung der Erscheinungen der Gesteinsmetamorphose und ihrer Produkte von **Professor Dr. U. Grubenmann.** Zweite, neu bearbeitete Auflage. Mit 23 Textfiguren und 12 Tafeln. Geheftet 20 Mk., gebunden 21 Mk. 50 Pf.

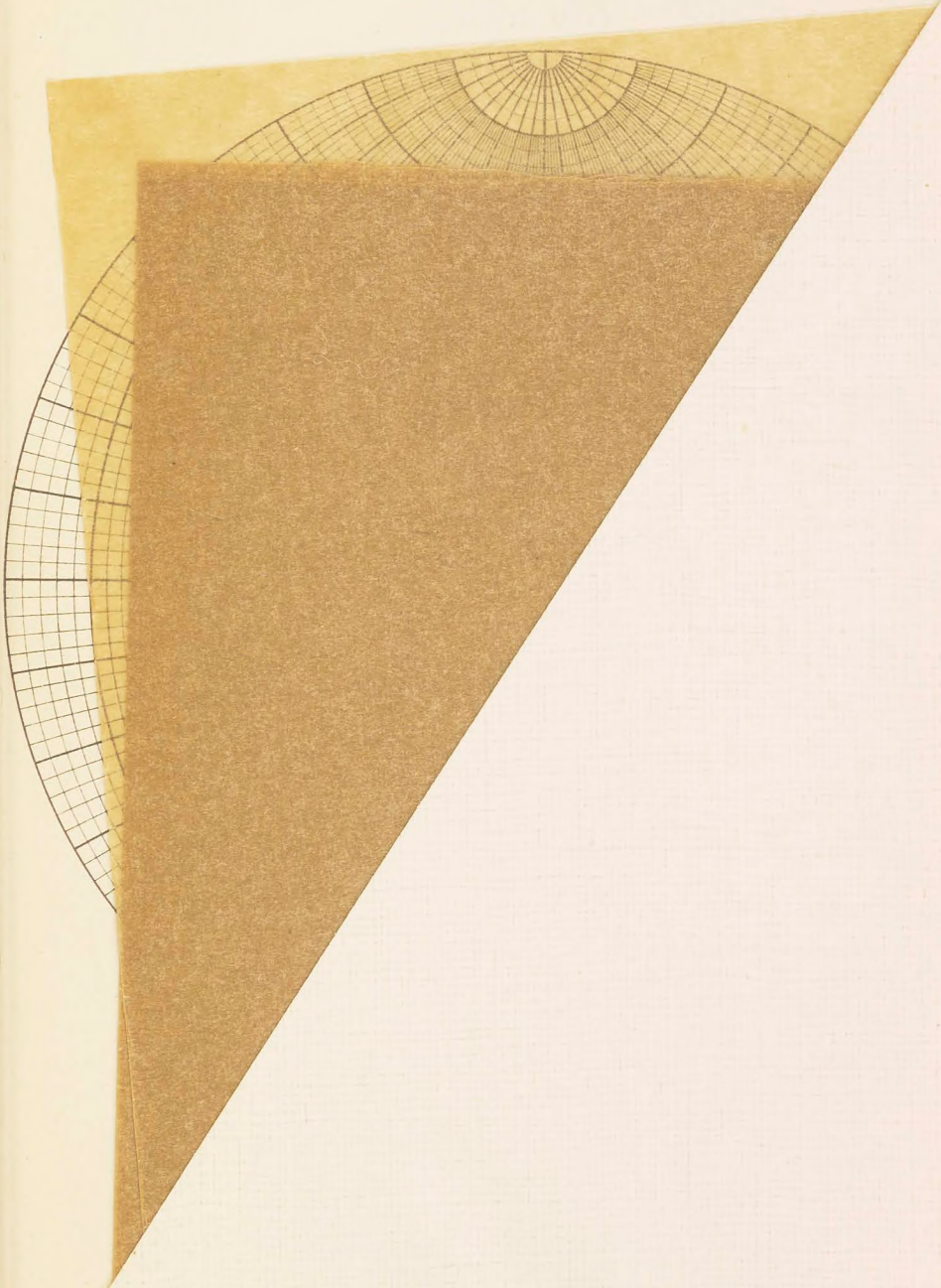
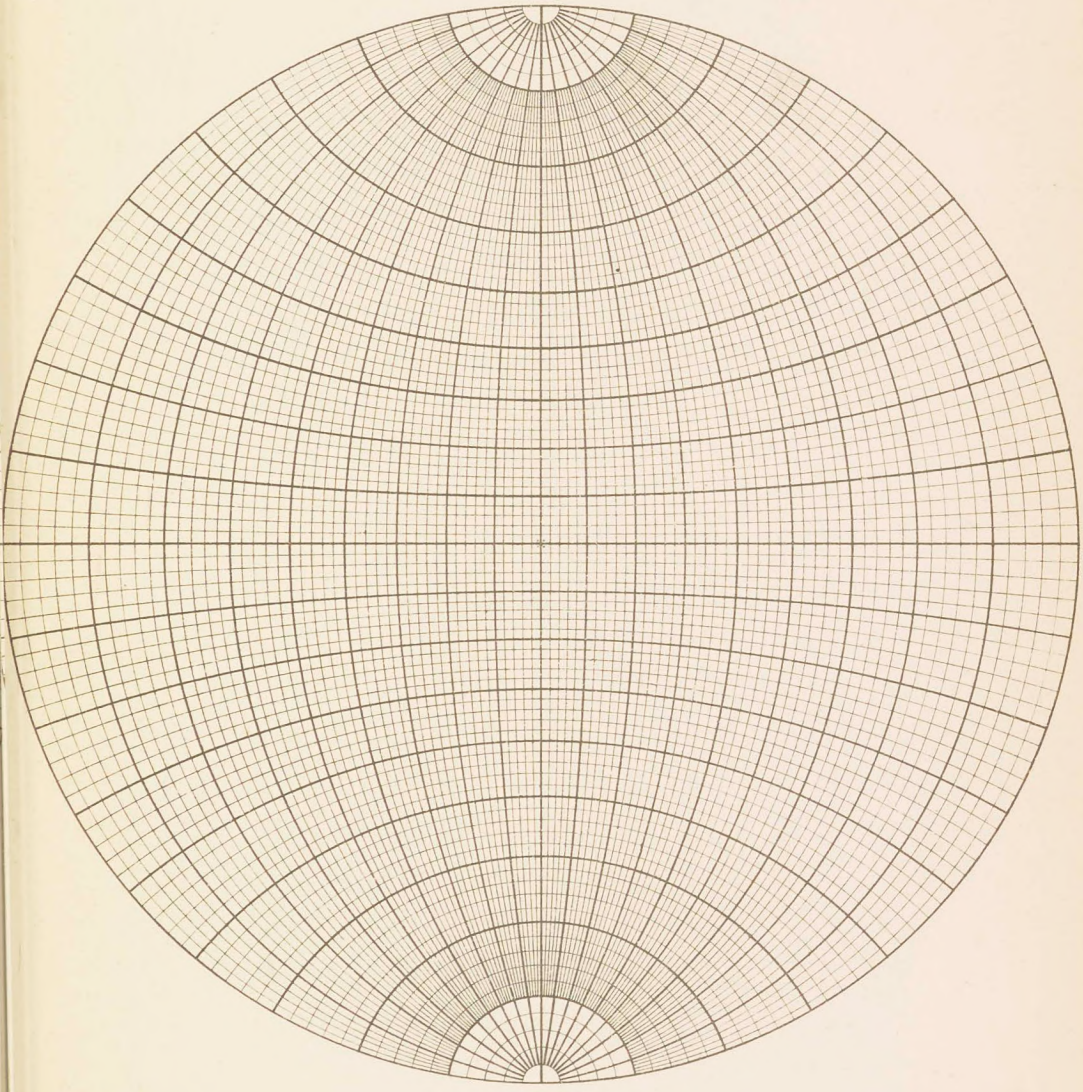
Lehre von den Erzlagerstätten von **Prof. Dr. Richard Beck.** Dritte, umgearbeitete Auflage. Zwei Bände mit 318 Figuren und einer Gangkarte. Geheftet 32 Mk., gebunden 37 Mk.

Die wichtigsten Lagerstätten der „Nicht-Erze" von **Dr. O. Stutzer**, Privatdozent an der Kgl. Bergakademie Freiberg, Sa.

Erster Band: **Graphit, Diamant, Schwefel, Phosphat.** Mit 108 Textabbildungen. Geheftet 16 Mk., geb. 17 Mk. 50 Pf.

Unter der Presse:

Praktikum der experimentellen Mineralogie und Kristallographie von **Professor Dr. Sommerfeldt.**

Ausführliche Prospekte gratis und franko

H.E.Boeke, Stereographische Projektion.